Integrais duplas

Considere $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado e $f : B \to \mathbb{R}$ uma função.

Problema: Definir de modo análogo ao Cálculo 1, a integral de f sobre B

Seja R um retângulo,

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ \ c \leq y \leq d\}$$

com $a < b$ e $c < d$ reais fixos. Seja
$P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ e
$P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$ partições de $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente. O conjunto

$$P = \{(x_i, y_j);\ i = 0, 1, 2, \cdots, n,\ j = 0, 1, 2, \cdots m\}$$

denomina-se uma partição do retângulo R. Notemos que uma partição P de R denomina mn retângulos
$R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ \ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$.

Seja $f : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com B um conjunto limitado. Considere um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contém B. Seja $P = \{(x_i, y_j);\ i = 0, 1, 2, \cdots, n,\ j = 0, 1, 2, \cdots m\}$ uma partição de R. Para cada par de índices (i, j), seja ξ_{ij} um ponto escolhido arbitrariamente no retângulo R_{ij}. O número

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}) \Delta x_i \, \Delta y_j$$

onde $f(\xi_{ij})$ deve ser substituído por zero se $\xi_{ij} \notin B$, denomina-se soma de Riemann de f relativo a partição P e os pontos ξ_{ij}.
No que segue, Δ será o maior dos números $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n, \Delta y_1, \Delta y_2, \cdots, \Delta y_m$.

Dizemos que a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij})\Delta x_i\,\Delta y_j$$

tende a L, quando Δ tende a zero, e escrevemos

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij})\Delta x_i\,\Delta y_j = L$$

se para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$, que depende somente de ϵ mas não da escolha dos ξ_{ij}, tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij})\Delta x_i\,\Delta y_j - L\right| < \epsilon$$

para toda partição P, com $\Delta < \delta$.

Quando L existir, denomina-se integral dupla segundo Riemann de f sobre B e indica-se

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij})\Delta x_i \, \Delta y_j$$

Se este número existe, dizemos que f é integrável em B.

Definição

Definimos a área de B por

$$\text{área de } B = \iint_B dxdy$$

Definição

Seja $f(x,y)$ integrável em B, com $f(x,y) \geq 0$ em B e

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in B,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

Definimos o volume de A por

$$\text{volume de } A = \iint_B f(x,y)dxdy$$

Sejam f e g integráveis em B e k uma constante. Temos que:
I) $f+g$ e kf são integráveis e

$$\int\int_B (f(x,y)+g(x,y)dxdy = \int\int_B f(x,y)dx\,dy + \int\int_B g(x,y)dx\,dy$$

$$\int\int_B kf(x,y)dxdy = k\int\int_B f(x,y)dxdy$$

II) Se $f(x,y)\geq 0$ em B então $\int\int_B f(x,y)dxdy \geq 0$
III) Se $f(x,y)\leq g(x,y)$ em B então

$$\int\int_B f(x,y)dxdy \leq \int\int_B g(x,y)dxdy$$