MAP0217 - Cálculo Diferencial
MAT0311 - Cálculo Diferencial e Integral V
3a. Prova

2º Semestre de 2020

Nesta prova você deve escolher questões cujos valores somem no máximo 10 pontos para fazer e entregar.
Deve também entregar tabela abaixo preenchida com suas escolhas, **apresentada no início do seu arquivo**.

Tabela a ser preenchida que deve vir no início de seu arquivo:

Questão	Se fez, preencha com X	Questão	Se fez, preencha com X
Questão 1 2,0		Questão 6 2,0	
Questão 2 1,0		Questão 7 2,0	
Questão 3 1,0		Questão 8 2,0	
Questão 4 2,0		Questão 9 2,0	
Questão 5 2,0			

Questão 1 *(2,0)* Considere o espaço métrico $(M, \widetilde{d})$ com $M = \mathbf{R}^2$ e $\widetilde{d} : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ definida por

$$\widetilde{d}(x, y) = |x_1 + x_2 - y_1 - y_2| + d_*(x_1 - x_2, y_1 - y_2), \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2,$$

onde d_* é a métrica discreta em $\mathbf{R}$. isto é, se $s, t \in \mathbf{R}$. Sejam $\pi_1 : M \to \mathbf{R}$ e $\pi_2 : M \to \mathbf{R}$ as projeções definidas por $\pi_1(x) = x_1$ e $\pi_2(x) = x_2$.

Considere $\mathbf{R}$ com a distância usual e mostre que π_1 e π_2 são contínuas.

Questão 2 *(1,0)* Mostre que não existe função contínua $f : B_1[0] \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, cuja imagem seja a esfera de centro na origem e raio 1 *"menos um ponto"*.

Questão 3 *(1,0)* Mostre que não existe função contínua injetora $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que a imagem da esfera S_1 de raio 1 centrada na origem tem como imagem a união o de duas esferas tangentes, S_2 de centro em $(-1, 0, 0)$ e raio 1, e S_3 de centro $(1, 0, 0)$ e raio 1.

Questão 4 *(2,0)* Seja (M, d) um espaço métrico *[lembrem que consideramos sempre $M \neq \emptyset$!]* e seja $A \subset M$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe $\overline{a} \in M$ e $r > 0$ tal que $A \subset B_r(\overline{a})$.

(b) Existe $\overline{a} \in M$ e $s > 0$ tal que $A \subset B_s[\overline{a}]$.

(b) Existe $\beta > 0$ tal que $d(x, y) \leq \beta, \forall x, y \in A$.

(b) Existe $\gamma > 0$ tal que $d(x, y) \leq \gamma, \forall x, y \in A$.

Questão 5 *(2,0)* Seja $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uma sequência em $\mathbf{R}^2$ cujos pontos são da forma

$$x = (s\ e^t\cos(t+s), t\ e^{ts} + \sin(ts)), \text{ com } 0 \le s \le 1 \text{ e } 0 \le t \le 1.$$

Mostre que para cada $\epsilon > 0$ pelo menos uma das bolas $B_\epsilon(x_n)$ contém pontos x_m da sequência com $m \neq n$.

Questão 6 *(2,0)* Sejam $(M, d_M), (N, d_N)$ espaços métricos e seja $f : A \subset M \to N$.

Sejam $\widetilde{A} \subset A$ e $\widehat{A} = A \setminus \widetilde{A}$.

Seja $a \in A^o$ um ponto de acumulação de A.

Mostre que:

(a) Se a não é ponto de acumulação de $\widehat{A}$ então existe $lim_{x\to a} f$ se e só se existe $lim_{x\to a} f|_{\widetilde{A}}$. Nesse caso, $lim_{x\to a} f = lim_{x\to a} f|_{\widetilde{A}}$.

(b) Se a não é ponto de acumulação de $\widetilde{A}$ então existe $lim_{x\to a} f$ se e só se existe $lim_{x\to a} f|_{\widehat{A}}$. Nesse caso, $lim_{x\to a} f = lim_{x\to a} f|_{\widehat{A}}$.

(c) Se a é ponto de acumulação de $\widetilde{A}$ e é ponto de acumulação de $\widehat{A}$ então existe $lim_{x\to a} f$ se e só se existem $\widetilde{\ell} = lim_{x\to a} f|_{\widetilde{A}}$ e $\widehat{\ell} = lim_{x\to a} f|_{\widehat{A}}$ e $\widetilde{\ell} = \widehat{\ell}$. Nesse caso, $lim_{x\to a} f = lim_{x\to a} f|_{\widetilde{A}} = lim_{x\to a} f|_{\widehat{A}}$.

Questão 7 *(2,0)* Seja $f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}$, $(x,y) \neq (0,0)$. Determinar o limite de f quando (x,y) tende a $(0,0)$ ao longo da reta $y = mx$. É possível definir $f(0,0)$ de modo que f seja contínua em $(0,0)$?

Questão 8 *(2,0)* Prove a seguinte proposição:

"Sejam $(M,d), (N,\widetilde{d})$ espaços métricos suponha que M é compacto. Seja $f : M \to N$ contínua, bijetora. Então $f^{-1} : N \to M$ é contínua."

Dê um exemplo para mostrar que não podemos abrir mão da compacidade de M na proposição anterior.

Questão 9 *(2,0)* Seja $M = \mathbf{R}^n$ com a métrica usual d e seja $N = C([-\pi,\pi])$ com a métrica d_2 definida por $d_2(h,k) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[h(t)-k(t)]^2 dt}$.

Existe $f : M \to N$ contínua tal que $f(B_1[0]) = \mathbf{B_1}[O]$? Justifique sua resposta.

Obs.: Note que

$B_1[0] = \{x \in \mathbf{R}^n \mid d(x,0) \le 1\}$ e $\mathbf{B_1}[O] = \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbf{R} \mid f \text{ é contínua e } d_2(f,O) \le 1\}$.