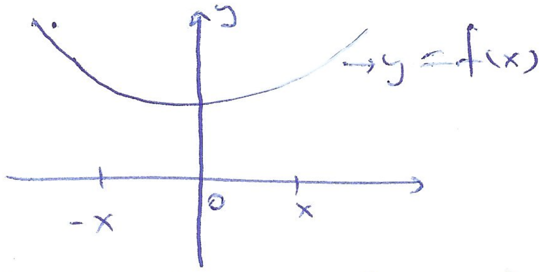
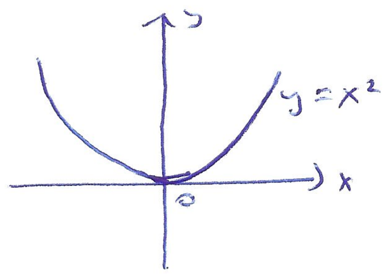
Funções pares e Funções ímpares

Definição: uma função f é uma função par se $f(-x) = f(x)$ para qualquer x do domínio de f.

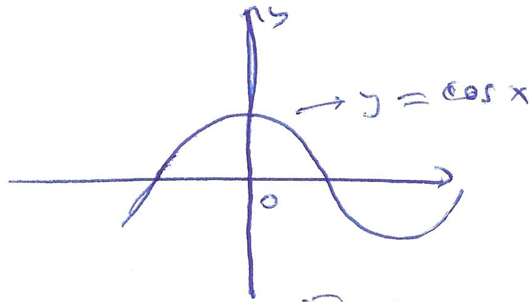
f é uma função ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para qualquer x do domínio de f.

Função par:



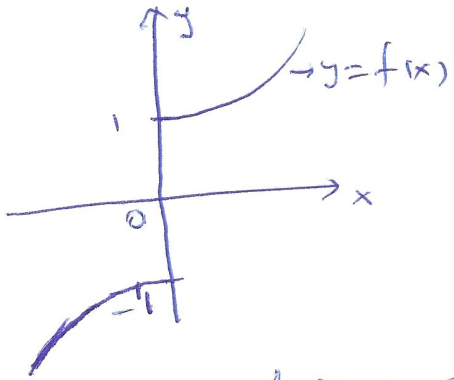


tem simetria em relação ao eixo y.

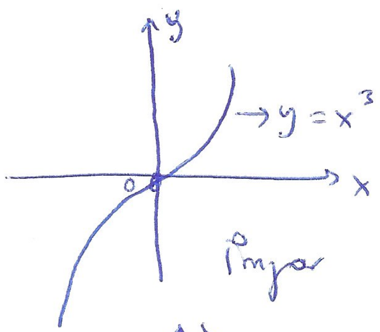


são pares.

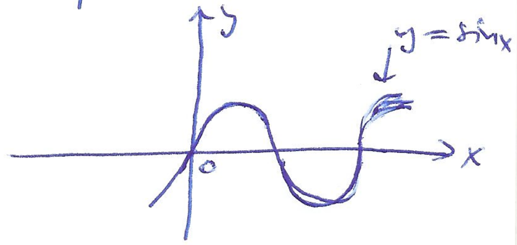
Função ímpar:



simetria em relação ao origem



ímpar



Propriedades básicas:

1) se f, g são pares $\Rightarrow$ $f+g$, e, fg são pares.

2) se f, g são ímpares $\Rightarrow$ $\begin{cases} f+g \text{ é ímpar} \\ fg \text{ é par} \end{cases}$

3) se f é ímpar e g é par $\Rightarrow$ fg é ímpar.

Séries de Senos e Cossenos:

a) Suponha que f e f' são seccionalmente contínuos em $[-L, L)$, e que f é uma funsão periódica par com período $2L$.

Então $f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ é par e,

$f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ é ímpar.

Logo os coeficientes de Fourier de f são dados por:

$$(1)\begin{cases} a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, & m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m = 0, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Então f tem a série de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$

$\hookrightarrow$ chamada série de Fourier de Cossenos.

b) Suponha que f e f' são seccionalmente contínuos em $[-L, L)$, e que f é uma funsão periódica ímpar de período $2L$.

Então $f(x).\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ é ímpar e,

$f(x).\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ é par.

Logo os coeficientes de Fourier de f são dadas por:

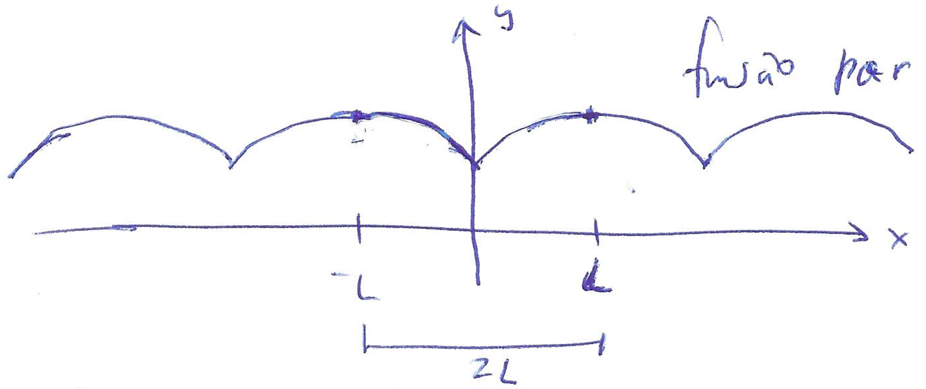
$$(2)\begin{cases} a_m = 0, & m = 0, 1, 2, \dots \\ b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Então f tem a série de Fourier:

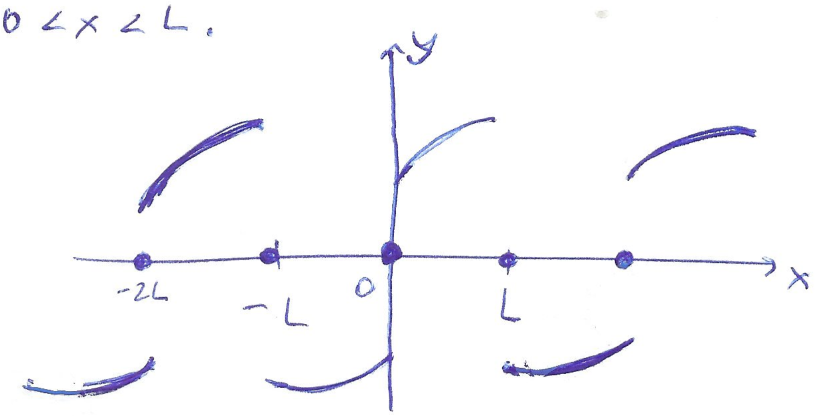
$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$

$\hookrightarrow$ chamada série de Fourier de Senos.

Observe: que as fórmulas de a_m em (1) só usa os valores de $f(x)$ entre $x=0$ e $x=L$. Logo $\forall$ função dada somente nesse intervalo podemos formar a série de cossenos de $f(x)$. Segue-se do teorema da convergência pontual que a série será convergente para $f(x)$ com $0 \leq x \leq L$, e fora desse intervalo converge para a função periódica a qual coincide com $f(x)$ em $0 \leq x < L$.

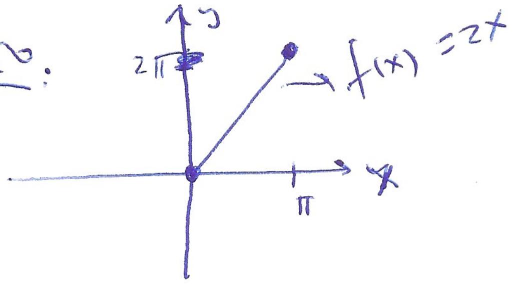


Analogamente, podemos formar a série de senos para uma função $f(x)$ definida apenas entre 0 e L. Tal série representa uma função F periódica ímpar que coincide com $f(x)$ em $0 < x < L$.



Exemplo: seja $f(x) = 2x$, $0 \leq x \leq \pi$.
Ache as séries de Fourier de senos e de cossenos de f.
Determine a soma de cada uma das séries e faça os gráficos de f e da soma de cada uma das séries encontradas.

Solução:



Série de cossenos: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{4}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = 2\pi.$

$$a_m \underset{m \geq 1}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(mx)\,dx =$$

$u = x$, $dv = \cos(mx)$
$du = dx$, $v = \frac{\operatorname{sen}(mx)}{m}$

$$= \frac{4}{\pi}\left[x\frac{\operatorname{sen}(mx)}{m}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}(mx)}{m}dx\right] =$$

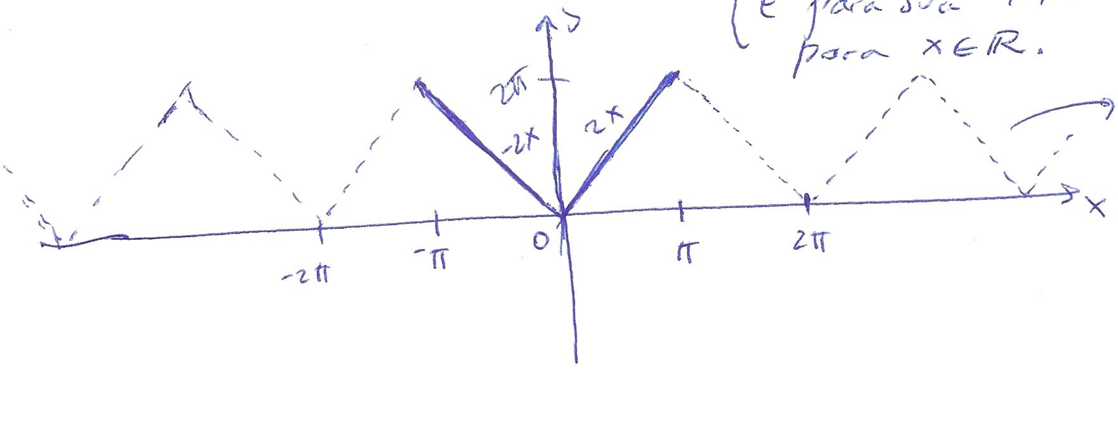
$$= +\frac{4}{\pi}\frac{\cos(mx)}{m^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi m^2}\left[\cos(m\pi) - \cos 0\right] = \frac{4}{\pi m^2}\left[(-1)^m - 1\right].$$

Logo a série de cossenos:

$$\pi + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi m^2}\left[(-1)^m - 1\right]\cos(mx) =$$

$$= \pi + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)$$

A série de cossenos converge à: $\begin{cases} 2x & \text{para } 0 < x \leq \pi \\ -2x & \text{para } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$
e para sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.



Serie de senos: $b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\text{sen}(mx)\,dx$

$$\frac{4}{\pi}\left[-x\frac{\cos(mx)}{m}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(mx)}{m}\,dx\right] = -\frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi\cos(m\pi)}{m}\right]$$

$u = x \quad dv = \text{sen}(mx)$

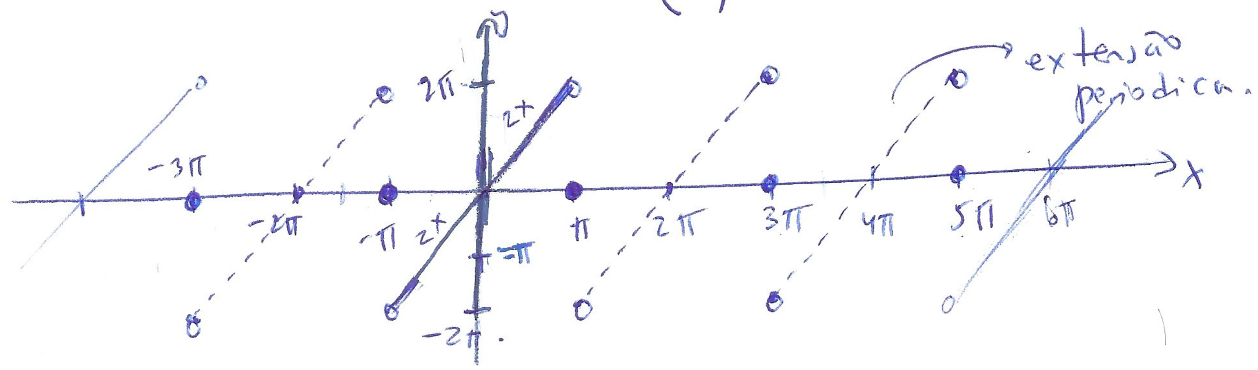
$du = dx \quad v = -\frac{\cos(mx)}{m}$

$$= -\frac{4\cos(m\pi)}{m} = -\frac{4(-1)^m}{m}$$

$m \geq 1$.

fica então: $\sum_{m=1}^{\infty} 4(-1)^{m+1}\frac{\text{sen}(mx)}{m}$

Serie de senos converge para
$$\begin{cases} 2x & \text{para } 0 \leq x < \pi \\ 2x & \text{para } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{para } x = \pm\pi \\ \text{e para sua extensão periódica} \\ \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



observe que denotando por $S(x)$ a soma da serie de senos, temos que: $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, $\quad S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

$S(\pi) = 0$,

$S(15\pi) = 0$

$S(100\pi) = 0$

$S(2019\pi) = 0$

$S\left(\frac{7\pi}{2}\right) = S\left(\frac{3\pi}{2}\right) = S\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$

pois $\frac{7\pi}{2} = a + 4\pi \Rightarrow a = -\pi/2$.

$S\left(-\frac{19}{2}\pi\right) = S\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

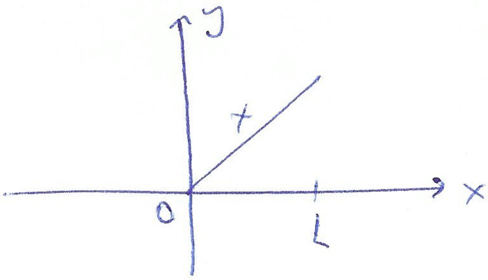
pois $-\frac{19}{2}\pi = a - 8\pi \Rightarrow a = -\frac{3\pi}{2}$

Questão:

Seja $f: [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(0,L)$

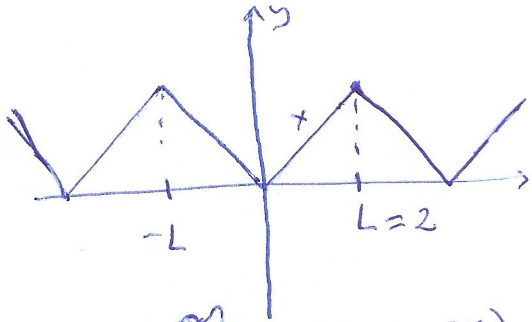
$f(x) = x$

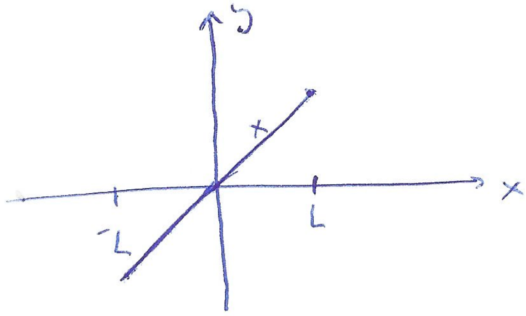


Queremos obter uma representação em série de Fourier para f.

temos duas opções: forma par ou forma ímpar

série de cossenos — série de senos.





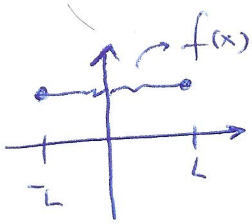
$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$0 \leq x < L$ coincide com $f(x)$.

Forma para obter o gráficos:

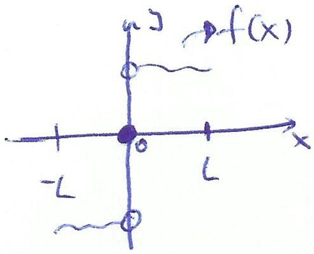
1- se é par: defina $g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$



então $g(x)$ é par $\Rightarrow g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

$\Rightarrow \forall x \in [0,L],\ g(x) = f(x).$

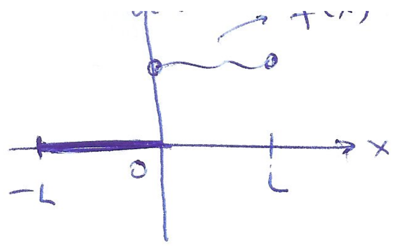
2- se é ímpar: defina $h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L \\ 0, & x = 0, L \\ -f(-x), & -L < x < 0 \end{cases}$



então $h(x)$ é ímpar $\Rightarrow h(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$,

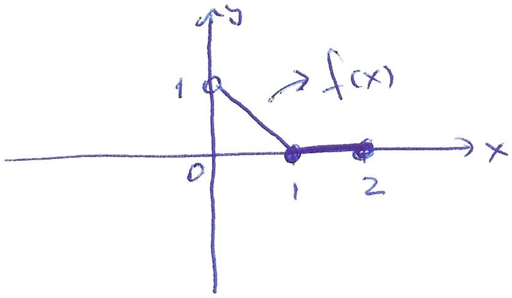
$\Rightarrow \forall x \in (0,L),\ h(x) = f(x).$

3) trivial

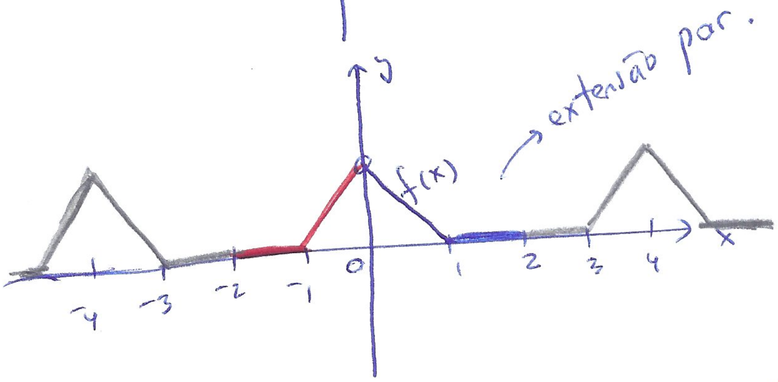


defina $k(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L \\ 0, & -L < x < 0. \end{cases}$

Exemplo: $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$. Fazer gráficos da extensão par e ímpar da f.

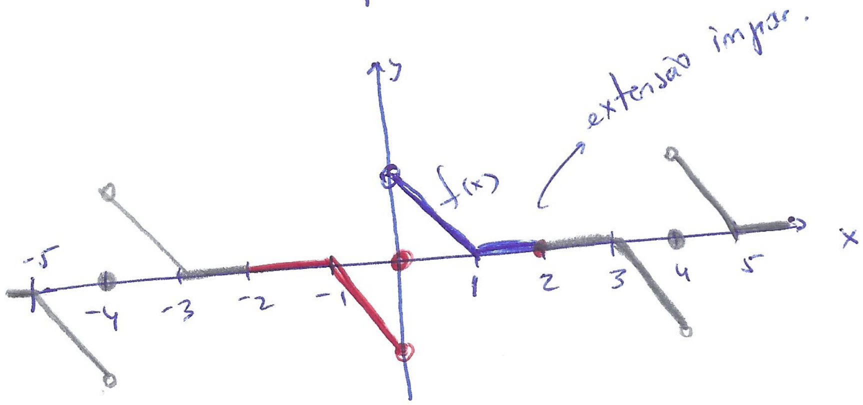


→ gráfico da função f em $[0,2]$.



par: $g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq 2 \\ f(-x), & -2 < x < 0 \end{cases}$

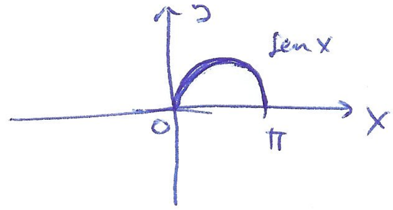
$= \begin{cases} 1-x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \\ 1+x, & -1 < x < 0 \\ 0, & -2 < x \leq -1 \end{cases}$

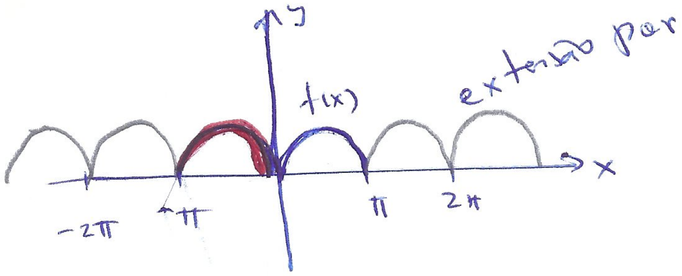


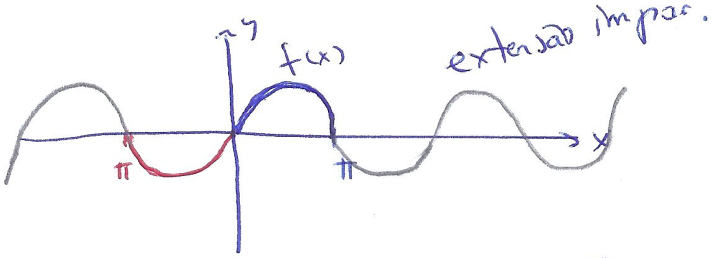
ímpar: $h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < 2 \\ 0, & x = 0, 2 \\ -f(-x), & -2 < x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1-x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \\ -(1+x), & -1 < x < 0 \\ 0, & -2 < x \leq -1. \\ 0, & x = 0, 2 \end{cases}$

Exeplo: $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi$







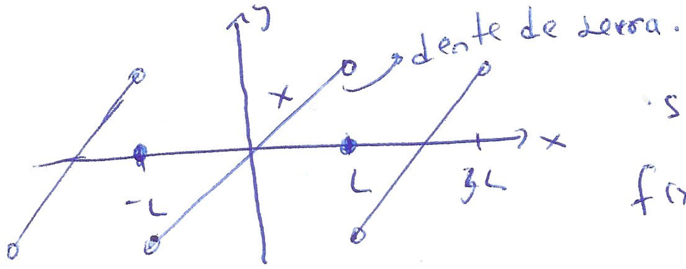
$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 < x < \pi \\ -\operatorname{sen} x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Par

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \\ \operatorname{sen} x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

ímpar

Exemplo:



sabemos que

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

onde $f(x) = x, \quad x \in (-L, L)$
$f(x + 2L) = f(x)$.

pelo teorema de parseval temos que:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

$$\| \quad \frac{2}{L} \int_0^L f^2(x)\,dx = \frac{2}{L} \int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{L} \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{2}{3L}(L^3) = \frac{2}{3} L^2.$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} L^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \Rightarrow \frac{2}{3} L^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2L}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} L^2 = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

isto é: $\displaystyle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$