Lógica
Aula 14

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2020

Necessidade de uma linguagem mais rica

Na lógica proposicional, não temos como diferenciar "todo" e "existe":

- "Existe um homem que não é mortal."
- "Todo homem é imortal."

Necessidade de uma linguagem mais rica

Na lógica proposicional, não temos como diferenciar "todo" e "existe":

- "Existe um homem que não é mortal."
- "Todo homem é imortal."

Como representar "Todo aluno é orientado por algum professor."?

Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

P(pedro): Pedro é professor

Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

P(pedro): Pedro é professor

O(pedro,joão): Pedro é orientador de João

Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

P(pedro): Pedro é professor

O(pedro,joão): Pedro é orientador de João

Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

P(pedro): Pedro é professor

O(pedro,joão): Pedro é orientador de João

Usando variáveis:

$A(x)$: x é um aluno

Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

P(pedro): Pedro é professor

O(pedro,joão): Pedro é orientador de João

Usando variáveis:

$A(x)$: x é um aluno (ou $A(y)$: y é um aluno)

Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

P(pedro): Pedro é professor

O(pedro,joão): Pedro é orientador de João

Usando variáveis:

$A(x)$: x é um aluno (ou $A(y)$: y é um aluno)

$P(x)$: x é professor

Adicionando estrutura

A(joão): João é aluno

P(pedro): Pedro é professor

O(pedro,joão): Pedro é orientador de João

Usando variáveis:

$A(x)$: x é um aluno (ou $A(y)$: y é um aluno)

$P(x)$: x é professor

$O(x, y)$: x é orientador de y

Quantificadores

“Todo aluno é orientado por algum professor.”

Quantificadores

"Todo aluno é orientado por algum professor."

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge O(y,x)))$$

Quantificadores

"Todo aluno é orientado por algum professor."

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(P(y) \land O(y,x)))$$

"Algum aluno é orientado por todos os professores."

Quantificadores

"Todo aluno é orientado por algum professor."

$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge O(y,x)))$

"Algum aluno é orientado por todos os professores."

$\exists x(A(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow O(y,x)))$

Quantificadores

"Todo aluno é orientado por algum professor."

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge O(y, x)))$$

"Algum aluno é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow O(y, x)))$$

"Algum aluno não é orientado por todos os professores."

Quantificadores

"Todo aluno é orientado por algum professor."

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge O(y,x)))$$

"Algum aluno é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow O(y,x)))$$

"Algum aluno não é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \wedge \neg(\forall y(P(y) \rightarrow O(y,x))))$$

Quantificadores

"Todo aluno é orientado por algum professor."

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(P(y) \land O(y, x)))$$

"Algum aluno é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow O(y, x)))$$

"Algum aluno não é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \land \neg(\forall y(P(y) \rightarrow O(y, x))))$$

$$\exists x(A(x) \land \exists y(P(y) \land \neg(O(y, x))))$$

Quantificadores

"Todo aluno é orientado por algum professor."

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge O(y,x)))$$

"Algum aluno é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow O(y,x)))$$

"Algum aluno não é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \wedge \neg(\forall y(P(y) \rightarrow O(y,x))))$$

$$\exists x(A(x) \wedge \exists y(P(y) \wedge \neg(O(y,x))))$$

"Algum aluno não é orientado por nenhum professor."

Quantificadores

"Todo aluno é orientado por algum professor."

$$\forall x(A(x) \to \exists y(P(y) \land O(y, x)))$$

"Algum aluno é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \land \forall y(P(y) \to O(y, x)))$$

"Algum aluno não é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \land \neg(\forall y(P(y) \to O(y, x))))$$

$$\exists x(A(x) \land \exists y(P(y) \land \neg(O(y, x))))$$

"Algum aluno não é orientado por nenhum professor."

$$\exists x(A(x) \land \neg(\exists y(P(y) \land O(y, x))))$$

Quantificadores

"Todo aluno é orientado por algum professor."

$$\forall x(A(x) \rightarrow \exists y(P(y) \land O(y,x)))$$

"Algum aluno é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow O(y,x)))$$

"Algum aluno não é orientado por todos os professores."

$$\exists x(A(x) \land \neg(\forall y(P(y) \rightarrow O(y,x))))$$

$$\exists x(A(x) \land \exists y(P(y) \land \neg(O(y,x))))$$

"Algum aluno não é orientado por nenhum professor."

$$\exists x(A(x) \land \neg(\exists y(P(y) \land O(y,x))))$$

$$\exists x(A(x) \land (\forall y(P(y) \rightarrow \neg O(y,x))))$$

Silogismo

Todo homem é mortal.
Sócrates é homem.

Sócrates é mortal.

Silogismo

Todo homem é mortal. $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$
Sócrates é homem.

Sócrates é mortal.

Silogismo

Todo homem é mortal. $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$
Sócrates é homem. $H(socrates)$

Sócrates é mortal.

Silogismo

Todo homem é mortal. $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$
Sócrates é homem. $H(socrates)$

Sócrates é mortal. $M(socrates)$

Silogismo

Todo homem é mortal. $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$
Sócrates é homem. $H(socrates)$

Sócrates é mortal. $M(socrates)$

"Existe um homem que não é mortal."

Silogismo

Todo homem é mortal. $\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$
Sócrates é homem. $H(socrates)$

Sócrates é mortal. $M(socrates)$

"Existe um homem que não é mortal." $\exists x(H(x) \wedge \neg M(x))$

Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe(x) (unária)

Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe(x) (unária)
- nota(x,y): nota de x no curso y (binária)

Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe(x) (unária)
- nota(x,y): nota de x no curso y (binária)
- preço(x,y,z): preço de x na loja y na data z (ternária)

Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe(x) (unária)
- nota(x,y): nota de x no curso y (binária)
- preço(x,y,z): preço de x na loja y na data z (ternária)
- ...

Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe(x) (unária)
- nota(x,y): nota de x no curso y (binária)
- preço(x,y,z): preço de x na loja y na data z (ternária)
- ...
- $min(x_1, x_2, ..., x_n)$: mínimo (n-ária)

Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe(x) (unária)
- nota(x,y): nota de x no curso y (binária)
- preço(x,y,z): preço de x na loja y na data z (ternária)
- ...
- $min(x_1, x_2, ..., x_n)$: mínimo (n-ária)

Aridade

Símbolos de Funções:

- mãe(x) (unária)
- nota(x,y): nota de x no curso y (binária)
- preço(x,y,z): preço de x na loja y na data z (ternária)
- ...
- $min(x_1, x_2, ..., x_n)$: mínimo (n-ária)

Constantes (socrates) $\Longrightarrow$ funções de aridade zero.

Aridade

Predicados:

- A(x): x é aluno (unário)

Aridade

Predicados:

- A(x): x é aluno (unário)
- O(x,y): x é orientador de y (binário)

Aridade

Predicados:

- A(x): x é aluno (unário)
- O(x,y): x é orientador de y (binário)
- D(x,y,z): x é mais distante de z do que y (ternário)

Aridade

Predicados:

- A(x): x é aluno (unário)
- O(x,y): x é orientador de y (binário)
- D(x,y,z): x é mais distante de z do que y (ternário)
- ...

Aridade

Predicados:

- A(x): x é aluno (unário)
- O(x,y): x é orientador de y (binário)
- D(x,y,z): x é mais distante de z do que y (ternário)
- ...
- $Disjuntos(x_1, x_2, ..., x_n)$ (n-ário)

Definição Formal da Linguagem

Símbolos Lógicos:

- Variáveis

Definição Formal da Linguagem

Símbolos Lógicos:

- Variáveis
- Conectivos Booleanos ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$)

Definição Formal da Linguagem

Símbolos Lógicos:

- Variáveis
- Conectivos Booleanos ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$)
- Quantificadores ($\forall$, $\exists$)

Definição Formal da Linguagem

Símbolos Lógicos:

- Variáveis
- Conectivos Booleanos ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$)
- Quantificadores ($\forall$, $\exists$)

Definição Formal da Linguagem

Símbolos Lógicos:

- Variáveis
- Conectivos Booleanos ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$)
- Quantificadores ($\forall$, $\exists$)

Símbolos não lógicos:

- $\mathcal{F}$: conjunto de símbolos de funções.

Definição Formal da Linguagem

Símbolos Lógicos:

- Variáveis
- Conectivos Booleanos ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$)
- Quantificadores ($\forall$, $\exists$)

Símbolos não lógicos:

- $\mathcal{F}$: conjunto de símbolos de funções.
- $\mathcal{P}$: conjunto de símbolos de predicados.

Termos

Denotam objetos:

- variáveis

Termos

Denotam objetos:

- variáveis
- (constantes)

Termos

Denotam objetos:

- variáveis
- (constantes)
- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $f \in \mathcal{F}$ tem aridade n, $f(t_1, t_2, ..., t_n)$.

Termos

Denotam objetos:

- variáveis
- (constantes)
- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $f \in \mathcal{F}$ tem aridade n, $f(t_1, t_2, ..., t_n)$.

Termos

Denotam objetos:

- variáveis
- (constantes)
- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $f \in \mathcal{F}$ tem aridade n, $f(t_1, t_2, ..., t_n)$.

Exemplo: (2-(s(x)+y))*x ou *(-(2,+(s(x),y)),x)

Fórmulas

- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $P \in \mathcal{P}$ tem aridade n, $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma fórmula atômica.

Fórmulas

- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $P \in \mathcal{P}$ tem aridade n, $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma fórmula atômica.
- Se φ e ψ são fórmulas, $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \rightarrow \psi$ são fórmulas.

Fórmulas

- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $P \in \mathcal{P}$ tem aridade n, $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma fórmula atômica.
- Se φ e ψ são fórmulas, $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \rightarrow \psi$ são fórmulas.
- Se φ é uma fórmula e x é uma variável, $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi$ são fórmulas.

Fórmulas

- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $P \in \mathcal{P}$ tem aridade n, $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma fórmula atômica.
- Se φ e ψ são fórmulas, $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \rightarrow \psi$ são fórmulas.
- Se φ é uma fórmula e x é uma variável, $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi$ são fórmulas.

Fórmulas

- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $P \in \mathcal{P}$ tem aridade n, $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma fórmula atômica.
- Se φ e ψ são fórmulas, $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \rightarrow \psi$ são fórmulas.
- Se φ é uma fórmula e x é uma variável, $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi$ são fórmulas.

Exemplos: $\forall x(\text{Criança}(x) \rightarrow \mathit{MaisNovaQue}(x,\text{mãe}(x)))$, etc.

Variáveis livres

Variáveis que não aparecem no escopo de um quantificador.

Variáveis livres

Variáveis que não aparecem no escopo de um quantificador.

Na árvore: subindo em direção à raiz, não encontramos quantificador com a mesma variável.

Variáveis livres

Variáveis que não aparecem no escopo de um quantificador.

Na árvore: subindo em direção à raiz, não encontramos quantificador com a mesma variável.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge S(x, y))$

Variáveis livres

Variáveis que não aparecem no escopo de um quantificador.

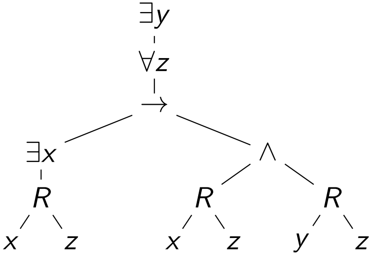
Na árvore: subindo em direção à raiz, não encontramos quantificador com a mesma variável.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))$
- $(\forall x(P(x) \wedge Q(y))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))$

Variáveis livres

Variáveis que não aparecem no escopo de um quantificador.



Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))[m(a, c)/y]$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x,y))[m(a,c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, m(a,c)))$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))[m(a, c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, m(a, c)))$
- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))[m(a, c)/x]$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,y))[m(a,c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,m(a,c)))$
- $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,y))[m(a,c)/x] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,y))$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))[m(a, c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, m(a, c)))$
- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))[m(a, c)/x] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x, y))$
- $(\forall x(P(x) \wedge Q(y))) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))[f(x, y)/x]$

Substituição

$\varphi[t/x]$: Toda ocorrência *livre* de x em φ é substituída pelo termo t.

Exemplos:

- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \land S(x,y))[m(a,c)/y] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \land S(x,m(a,c)))$
- $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \land S(x,y))[m(a,c)/x] \Longrightarrow$
  $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \land S(x,y))$
- $(\forall x(P(x) \land Q(y))) \rightarrow (\neg P(x) \lor Q(y))[f(x,y)/x] \Longrightarrow$
  $(\forall x(P(x) \land Q(y))) \rightarrow (\neg P(f(x,y)) \lor Q(y))$

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))[f(y,y)/x] \implies$???

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))$

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))$

t é *livre para* x *em* φ se nenhum x livre de φ aparece no escopo de algum $\forall y$ ou $\exists y$ com y em t.

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall y(P(x) \to Q(y))$

t é *livre para* x *em* φ se nenhum x livre de φ aparece no escopo de algum $\forall y$ ou $\exists y$ com y em t.

Pré condição para $\varphi[t/x]$

Substituição

- $S(x) \wedge \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall y(P(x) \rightarrow Q(y))$

t é *livre para* x *em* φ se nenhum x livre de φ aparece no escopo de algum $\forall y$ ou $\exists y$ com y em t.

Pré condição para $\varphi[t/x]$

- $S(x) \wedge \forall z(P(x) \rightarrow Q(z))[f(y,y)/x] \Longrightarrow$
  $S(f(y,y)) \wedge \forall z(P(f(y,y)) \rightarrow Q(z))$

Dedução Natural para LPO

Regras anteriores + igualdade e quantificadores

Dedução Natural para LPO

Regras anteriores + igualdade e quantificadores

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge_i \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge_{e_1} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge_{e_2} \qquad \frac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee_{i_1} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee_{i_2}$$

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots \\ \xi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots \\ \xi\end{array}}}{\xi}\ \vee_e \qquad \frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ \to_e \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\phi \to \psi}\ \to_i$$

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg_e \qquad \frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}\ \neg_e \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg_i \qquad \frac{\bot}{\phi}\ \bot_e$$

Regras da Igualdade

Introdução

$$\frac{}{t = t} =_i$$

Regras da Igualdade

Introdução

$$\frac{}{t = t} =_i$$

Eliminação

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} =_e$$

Regras da Igualdade

Introdução

$$\frac{}{t = t} =_i$$

Eliminação

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} =_e$$

Exemplos:

- $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

Regras da Igualdade

Introdução

$$\frac{}{t = t} =_i$$

Eliminação

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]} =_e$$

Exemplos:

- $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$
- $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$