

## 1 Os espaços $L_p$ e $l_p$

**Definição 1.1.** Se  $V$  é um espaço vetorial real, então uma função  $N : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma norma em  $V$  se:

1.  $N(v) \geq 0$  para todo  $v \in V$ .
2.  $N(v) = 0$  se, e somente se,  $v = 0$ .
3.  $N(\alpha v) = |\alpha|N(v)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $v \in V$ .
4. (Desigualdade triangular)  $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$  para  $v, u \in V$ .

Se  $N$  não cumprir a propriedade (2) ela chama-se uma semi-norma. Um espaço vetorial  $V$  com uma norma  $N$  chama-se um espaço vetorial normado.

**Exemplo.** 1. O espaço  $\mathbb{R}$  com o valor absoluto  $|\cdot|$  é um espaço vetorial normado.

2. Em  $\mathbb{R}^n$  temos as normas (verificar):

(a)  $N(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n |u_j|$

(b)  $N_p(u_1, \dots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^n |u_j|^p\right)^{1/p}$ , com  $p \geq 1$ .

(c)  $N_\infty(u_1, \dots, u_n) = \sup_{1 \leq j \leq n} \{|u_j|\}$ .

A norma mais utilizada é

$$N_2(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{\sum_{j=1}^n u_j^2}$$

Veremos depois que  $N_2$  é a única norma  $p$  que vem de um produto interno  $\langle, \rangle$ .

Note que toda norma  $N$  induz uma métrica  $d$  definida por  $d(x, y) = N(x - y)$ . Logo todo espaço normado é métrico.

3. Espaços  $l_p$  das sequências reais: Para  $p \geq 1$ ,  $l_p$  é o espaço das sequências

$$u = (u_1, \dots, u_n, \dots) \text{ com } N_p(u) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_j|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

A sequência  $u = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$  tem  $N_p(u) < \infty$  para todo  $p > 1$ .

4. Considere  $B(X)$  as funções a valores reais limitadas em  $X$ . Uma norma em  $B(X)$  é  $N(f) = \sup_{x \in X} \{|f(x)|\}$

5. Um exemplo de semi-norma: Em  $C^1([a, b])$  definimos  $N(f) = \sup_{x \in [a, b]} \{|f'(x)|\}$ , assim  $N(f) = 0 \Leftrightarrow f$  é constante.

**Definição 1.2.** Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$  as funções integráveis. Então  $N(f) = \int_X |f| d\mu$  é uma semi-norma ( $N(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$  q.t.p.).

Já vimos que  $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$  é um espaço vetorial.  $N$  verifica a desigualdade triangular:

$$N(f+g) = \int |f+g|d\mu \leq \int |f|d\mu + \int |g|d\mu = \int |f|d\mu + \int |g|d\mu = N(f)+N(g)$$

Vamos agora definir os espaços  $L_p$  de classes de funções equivalentes qtp. Dada uma medida, dizemos que  $f \sim g \Leftrightarrow f = g$  q.t.p. Então essa é uma relação de equivalência. Denotamos a classe de equivalência de  $f$  por  $[f]$

**Definição 1.3.** Se  $1 \leq p < \infty$  o espaço  $L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$  consiste de todas as classes de equivalência de funções reais  $[f]$  para as quais  $\int |f|^p d\mu < \infty$ . E definimos  $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ .

Pergunta: quais outros espaços vetoriais de dimensão infinita conhecemos?

Veremos mais adiante que  $\|\cdot\|_p$  é uma norma (desigualdade de Minkowski). Em geral trabalharemos identificando a classe de equivalência com alguma função na classe, quando não houver lugar a confusão.

Note que  $L_p$  é um espaço vetorial real: Se  $f, g \in L_p$  então  $f + g \in L_p$ . Com efeito:

$$\int |f + g|^p d\mu \leq \int 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} d\mu \leq 2^p \int |f|^p + |g|^p d\mu < \infty$$

(Mas isto não é a desigualdade triangular!)

$L_2$  é particularmente importante porque tem o produto interno

$\langle f, g \rangle = \int f(x) g(x) d\mu$ . Isto permite considerar funções ortogonais, etc.

**Definição 1.4.**  $L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$  é o espaço das classes de funções essencialmente limitadas. Dizemos que  $f$  é essencialmente limitada se existe  $B \in \mathbb{R}$  com  $|f(x)| \leq B$  q.t.p. A norma  $N_\infty$  é o supremo essencial de  $f$ , dado por:

$$N_\infty(f) = \inf\{B \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq B \text{ q.t.p.}\}$$

**Exemplo.** Seja  $\mu$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$  e  $r_n$  uma enumeração de  $\mathbb{Q}$ , considere  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ n, & \text{se } x = r_n \end{cases}$$

Então  $f$  é ilimitada, mas essencialmente limitada com  $N_\infty(f) = 1$ .

**Observação.** Se  $0 < p < 1$ , então definindo a norma  $p$  como acima não verifica a desigualdade triangular.

Exercícios:

1. Mostre que  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; \in L^p[0, 1]$  somente para  $1 \leq p < 2$
2. Mostre que  $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}; \in L^p[0, 1]$  somente para  $1 \leq p < 3$
3. Mostre que  $f(x) = \frac{1}{x}; \in L^p[1, \infty]$  somente para  $1 < p \leq \infty$
4. Para quais  $p \geq 1$  temos que se  $f, g \in L^p$  então  $fg \in L^p$ ?
5. Para quais  $\infty \geq p \geq 1$  temos que  $(a_1, \dots, a_n, \dots) \in l^p \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ ?