Desigualdades de Höldere e Minkowski - MAT0234 Medida e Integração

Prof. Jorge Adrian Beloqui

1 Desigualdades de Hölder e Minkowski

1.1 Desigualdade de Hölder

A desigualdade de Hölder afirma que, se $p, q \in [1, +\infty]$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $F \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ a valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ temos que:

1. fg é integrável, ou seja, $\int_X |fg| d\mu < \infty$
2. $$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Vejamos isto:

Proposição 1. *Sejam $r_1, r_2 > 0$, $0 \leq t \leq 1$, então $r_1^t r_2^{1-t} \leq tr_1 + (1-t)r_2$.*

Ou seja, a média geométrica ponderada é menor ou igual que a média aritmética ponderada com os mesmos pesos. Este é um resultado importante independentemente deste tema.

Demonstração. A função $\ln t$ é côncava, ou seja, $\frac{d^2}{dt^2} \ln t < 0$. Portanto

$$t \ln r_1 + (1-t) \ln r_2 \leq \ln(tr_1 + (1-t)r_2)$$

Tomando a exponencial, segue que:

$$r_1^t r_2^{1-t} \leq tr_1 + (1-t)r_2$$

Observe que o logarítmo ln e a exponencial são funções crescentes. □

Proposição 2 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $p, q > 1$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dados $a, b \geq 0$, vale que:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Demonstração. Na proposição anterior, tomamos $t = \frac{1}{p}$, $(1-t) = \frac{1}{q}$, $r_1 = a^p$ e $r_2 = b^q$, substituindo temos:

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq (a^p)^{1/p} (b^q)^{1/q} = ab$$

□

Teorema 3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $p, q \in [1, +\infty]$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $F \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $g \in L^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ a valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ temos que:*

1. *fg é integrável, ou seja, $\int_X |fg| d\mu < \infty$*
2. $$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demonstração. Suponhamos primeiro que $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$. Aplicamos a desigualdade de Young ao caso em que $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ e $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ e então:

$$\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

Como $f \in L^p$ e $g \in L^q$, segue que $|fg|$ é integrável.

Por último, integrando ambos os membros temos:

$$\frac{1}{p}\frac{\displaystyle\int |f(x)|^p d\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\displaystyle\int |g(x)|^q d\mu}{\|g\|_q^q} \geq \frac{\displaystyle\int |fg| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q}$$

Ou seja:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{\displaystyle\int |fg| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q}$$

Ou ainda:

$$\|f\|_p \|g\|_q \geq \int |fg| d\mu$$

No caso em que $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q$ são 0, segue que $f = 0$ ou $g = 0$ q.t.p e assim $fg = 0$ q.t.p e a desigualdade se verifica. Se $p = 1$ e $q = +\infty$ temos que $\|g\|_\infty$ é o sup essencial e $\int |fg| d\mu \leq \int |f| \|g\|_\infty d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ □

Um corolário da desigualdade de Hölder:

Corolário. *Se $f, g \in L_2$, então fg é integrável e*

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Exercício Seja $p > 1$ e considere $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}^n$ dados pelos vetores $(a_1, \ldots, a_n)$. Prove a Desigualdade de Hölder para $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}^n$ definindo $||a||_p = \{\sum_1^n |a_n|^p\}^{\frac{1}{p}}$.

Exercício Seja $p > 1$ e considere o espaço vetorial l_p dado pelas sequências de reais ou complexos $\{a_n\}$, tais que $\sum_1^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$. Prove a Desigualdade de Hölder para l_p *e* l_q, definindo $||a_n||_p = \{\sum_1^{+\infty} |a_n|^p \}^{\frac{1}{p}}$.

1.2 Desigualdade de Minkowski

Esta desigualdade serve para mostrar que $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ é uma norma, porque verifica a desigualdade triangular.

Teorema 4. *Se $f, h \in L_p$, com $p \geq 1$, então $f + h \in L_p$ e*

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p$$

Demonstração. Seja $p > 1$, obviamente $f + h$ é mensurável, como

$$|f + h|^p \leq (2\sup\{|f|, |h|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |h|^p)$$

temos que $f + h \in L_p$. Agora, como $p > 1$:

$$|f + h|^p = |f + h|^{p-1}|f + h| \leq |f||f + h|^{p-1} + |h||f + h|^{p-1} \tag{1}$$

Afirmamos que $|f + h|^{p-1} \in L_q$, isto pois $p + q = pq \Rightarrow p - 1 = \frac{p}{q}$ e então $|f + h|^{p-1} = |f + h|^{p/q}$. Integrando em L_q:

$$\left(\int (|f + h|^{p/q})^q d\mu\right)^{1/q} = \left(\int |f + h|^p d\mu\right)^{1/q} = (\|f + h\|_p^p)^{1/q} < \infty$$

Usamos aqui que $|f + h| \in L_p$. Assim, $|f + h|^{p-1} \in L_q$. Também, aplicando a desigualdade de Hölder à $|f||f + h|^{p-1}$, temos:

$$\begin{aligned}\int |f||f + h|^{p-1} d\mu &\leq \|f\|_p \left(\int |f + h|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p \left(\int |f + h|^p d\mu\right)^{1/q} \\ &= \|f\|_p \, \|f + h\|_p^{p/q}\end{aligned}$$

Pela decomposição (1) e um argumento análogo para $|h||f + h|^{p-1}$ temos:

$$\|f + h\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|h\|_p) \, \|f + h\|_p^{p/q}$$

Se $\|f + h\|_p = 0$ a desigualdade verifica-se. Se $\|f + h\|_p \neq 0$, então podemos dividir por $\|f + h\|_p^{p/q}$, obtendo:

$$\|f + h\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Concluímos observando que $p - \frac{p}{q} = 1$.

□

Exercício Seja $p > 1$ e considere o espaço vetorial l_p dado pelas sequências de reais ou complexos $\{a_n\}$, tais que $\sum_1^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$. Prove a Desigualdade de Minkowski para l_p, definindo $||a_n||_p = \{\sum_1^{+\infty} |a_n|^p\}^{\frac{1}{p}}$.
Exercício Estes resultados valem para $p < 1$? Por quê?