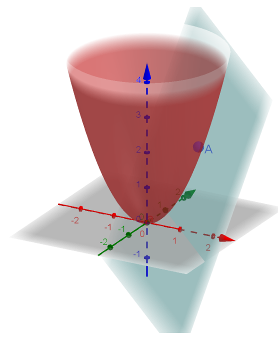
O conceito de Diferenciabilidade

Definição: Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis definida num dimínio D, e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se existem números reais α e β tais que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0, y \longrightarrow y_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0 \qquad (*)$$

Neste caso, dizemos que $z = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$ é o plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Escrevendo a equação do plano tangente na forma

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + (-1)(z - f(x_0, y_0)) = 0$$

obtemos o vetor normal a este plano, dado por $(\alpha, \beta, -1)$.

A reta de equação

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda(\alpha, \beta, -1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

é a reta normal ao plano tangente pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, e chama-se reta normal ao gráfico da função f neste ponto.

Uma outra maneira de escrever a condição (*) que caracteriza a diferenciabilidade da função f no ponto (x_0, y_0) pode ser obtida denotando-se

$$\begin{cases} x - x_0 = h \\ y - y_0 = k \end{cases}$$

Então teremos $\begin{cases} x = x_0 + h \\ y = y_0 + k \end{cases}$

e a condição (*) da diferenciabilidade pode ser reescrita:
a função $z = f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) se existem números reais α e β tais que

$$\lim_{h \longrightarrow 0, k \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \alpha h - \beta k}{\|(h, k)\|} = 0$$

No que segue, apresentaremos algumas propriedades das funções diferenciáveis.

Proposição 1: Se $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0).

Demonstração: Como f é diferenciável em (x_0, y_0), existem números reais α e β tais que

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \alpha(x-x_0) - \beta(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Vamos designar $\dfrac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \alpha(x-x_0) - \beta(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = E(x,y)$.

Então, se f é diferenciável em (x_0, y_0), existem números reais α e β tais que

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) - \alpha(x-x_0) - \beta(y-y_0) = E(x,y).\|(x,y)-(x_0,y_0)\|,$$

com $\lim_{x\longrightarrow x_0, y\longrightarrow y_0} E(x,y) = 0$

Neste caso, podemos escrever

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + E(x,y).\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$$

Como $\lim_{x\longrightarrow x_0, y\longrightarrow y_0} E(x,y) = 0$, vem que

$$\lim_{x\longrightarrow x_0, y\longrightarrow y_0} f(x_0,y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + E(x,y).\|(x,y)-(x_0,y_0)\| = f(x_0,y_0)$$

e portanto, $\lim_{x\longrightarrow x_0, y\longrightarrow y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

o que mostra que f é contínua em (x_0, y_0). $\triangle$

Proposição 2: Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável em (x_0, y_0).

Então vale a condição (*). Neste caso, temos que

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Demonstração: Como f é diferenciável em (x_0, y_0), existem números reais α e β tais que

$$\lim_{x\longrightarrow x_0, y\longrightarrow y_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \alpha(x-x_0) - \beta(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0 \qquad (*)$$

Em particular, considerando-se $y = y_0$, temos que $y - y_0 = 0$, e a expressão (*) fica assim:

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - \alpha(x-x_0)}{\|(x,y_0)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Por sua vez, $\|(x,y_0)-(x_0,y_0)\| = |x - x_0|$, e ficamos com

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - \alpha(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0$$

Logo,

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - \alpha(x-x_0)}{|x-x_0|}.\frac{x-x_0}{x-x_0} = 0$$

e podemos escrever

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0) - \alpha(x-x_0)}{x-x_0}.\frac{x-x_0}{|x-x_0|} = 0$$

ou

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} - \alpha \right) . \frac{x - x_0}{|x - x_0|} = 0$$

Dessa forma,

$$\lim_{x \to x_0+} \left(\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} - \alpha \right) . \frac{x - x_0}{|x - x_0|} = 0$$

o que implica

$$\lim_{x \to x_0+} \left(\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} - \alpha \right) = 0$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to x_0-} \left(\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} - \alpha \right) . \frac{x - x_0}{|x - x_0|} = 0$$

o que acarreta

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} - \alpha \right) .(-1) = 0$$

Dessa forma, obtemos

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} - \alpha \right) = 0$$

e portanto, $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Analogamente provamos que $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. △

O fato de uma função $z = f(x,y)$ possuir derivadas parciais $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ num ponto (x_0, y_0) de seu domínio não implica que a função seja diferenciável em (x_0, y_0). Se estas derivadas parciais existem, o plano $z = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$ existe; mas para que f seja diferenciável em (x_0, y_0), é ainda necessário que o limite da condição (*) se verifique. No entanto, dada uma função $z = f(x,y)$ num certo domínio D, se as derivadas parciais de f, além de existirem, forem funções contínuas em D, então f será diferenciável em D.

É o que diz o próximo teorema.

Proposição 3: Seja $z = f(x,y)$ uma função definida num domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas em D então f é diferenciável em D.