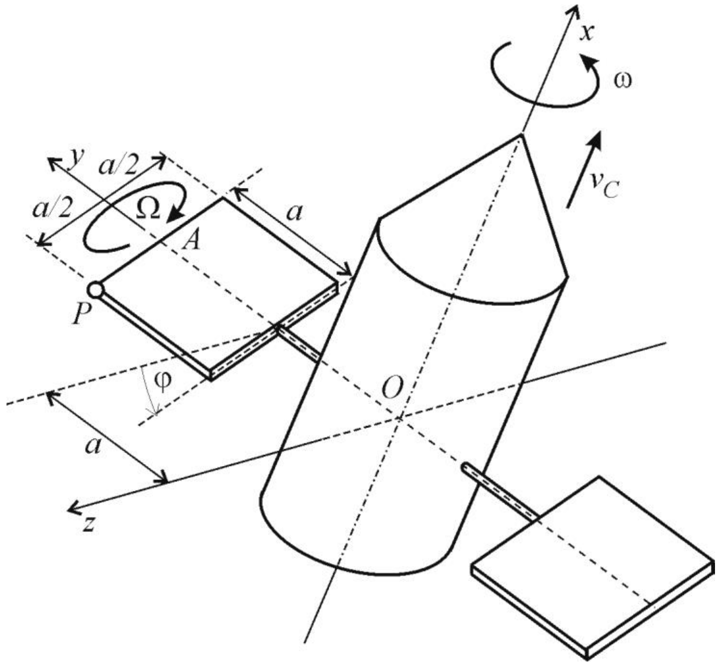
PME3100 Mecânica I

CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

Exemplo 5: Uma cápsula espacial move-se com velocidade constante v_C na direção do seu eixo (*Ox*), como mostrado na figura. A cápsula é dotada de duas antenas solares que captam a energia necessária para seu funcionamento. Sabendo que a cápsula gira com velocidade angular ω constante em torno do seu eixo (*Ox*) e que as antenas giram em torno do seu eixo (*Oy*) com velocidade angular relativa à cápsula Ω constante, calcule a velocidade e a aceleração total do ponto P da periferia da antena indicado na figura.



Resolução:

Referencial móvel: cápsula

$$\vec{v}_{P,r} = \vec{v}_{A,r} + \vec{\Omega} \wedge (P - A) = \Omega\vec{j} \wedge \frac{a}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{k} - \sin\varphi\vec{i}\right) = \frac{\Omega a}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\vec{k}\right)$$

$$\vec{v}_{P,a} = \vec{v}_{O,a} + \vec{\omega} \wedge (P - O) = v_c\vec{i} + \omega\vec{i} \wedge \left[\frac{a}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{k} - \sin\varphi\vec{i}\right) + 2a\vec{j}\right] =$$

$$= v_c\vec{i} - \frac{\omega a}{2}\cos\varphi\,\vec{j} + 2\omega a\vec{k}$$

Lei de composição de velocidades:

$$\boldsymbol{\vec{v}_P} = \vec{v}_{P,r} + \vec{v}_{P,a} = \boldsymbol{\left(v_c + \frac{\Omega a}{2}\cos\varphi\right)\vec{i} - \frac{\omega a}{2}\cos\varphi\,\vec{j} + \left(\frac{\Omega a}{2}\sin\varphi + 2\omega a\right)\vec{k}}$$

Derivando em relação ao tempo, com: $\dot{\varphi} = -\Omega$, $\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \wedge \vec{i} = \vec{0}$, $\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \wedge \vec{j} = \omega\vec{k}$, $\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} = -\omega\vec{j}$, vem:

$$\boldsymbol{\vec{a}_P = \frac{\Omega^2 a}{2}\sin\varphi\,\vec{i} - (\Omega\omega a\sin\varphi + 2\omega^2 a)\vec{j} - (\Omega^2 + \omega^2)\frac{a}{2}\cos\varphi\,\vec{k}}$$

Ou, compondo também as acelerações:

$$\vec{a}_{P,r} = \underbrace{\vec{a}_{A,r}}_{\vec{0}} + \underbrace{\dot{\vec{\Omega}}}_{\vec{0}} \wedge (P - A) + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (P - A)\right] = -\frac{\Omega^2 a}{2}\left(\cos\varphi\,\vec{k} - \sin\varphi\vec{i}\right)$$

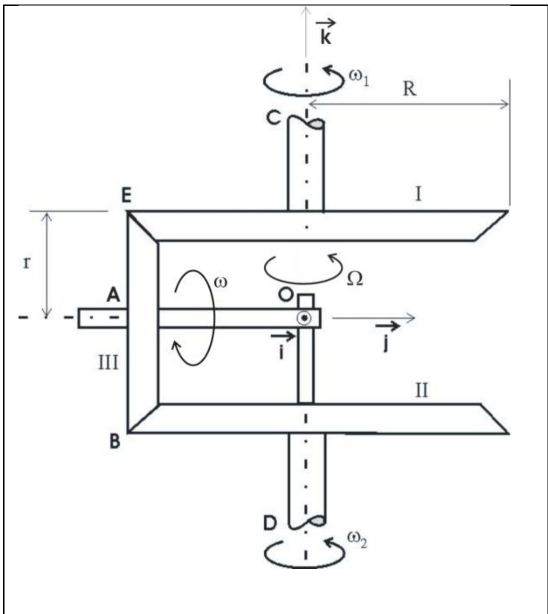
$$\vec{a}_{P,a} = \vec{a}_{A,a} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{\vec{0}} \wedge (P - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - A)] = -\frac{\omega^2 a}{2} \cos\varphi\, \vec{k} - 2a\omega^2 \vec{j}$$

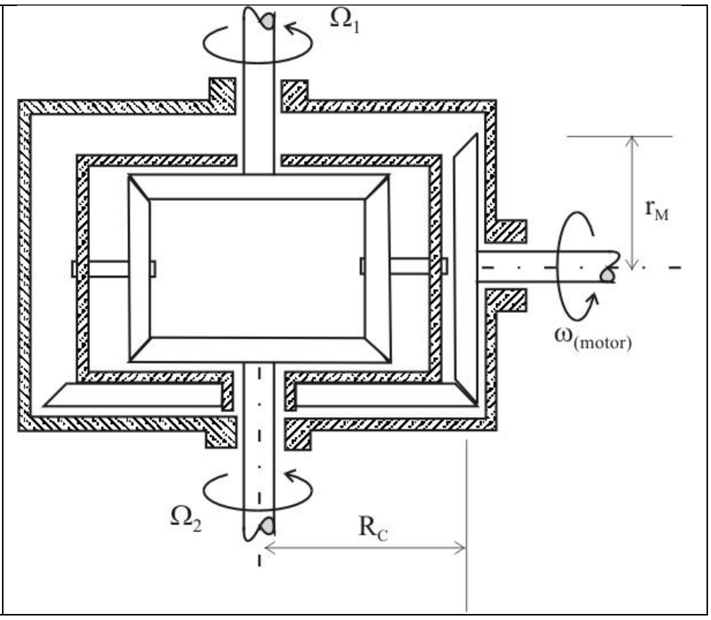
$$\vec{a}_{P,c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P,r} = -\Omega\omega a \sin\varphi \vec{j}$$

Vem:

$$\boldsymbol{\vec{a}_P = \frac{\Omega^2 a}{2} \sin\varphi\, \vec{i} - (\Omega\omega a \sin\varphi + 2\omega^2 a)\vec{j} - (\Omega^2 + \omega^2)\frac{a}{2} \cos\varphi\, \vec{k}}$$

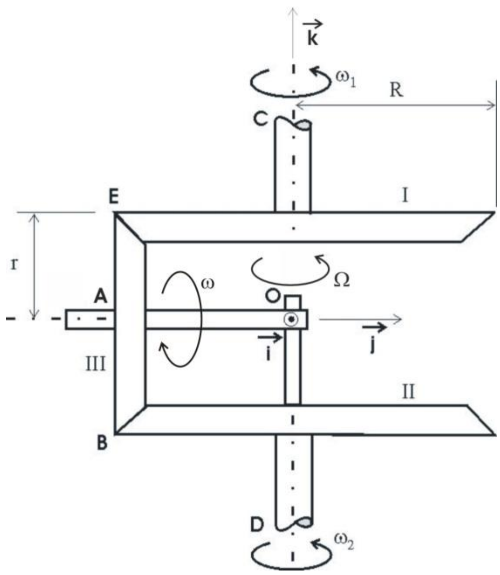
Exemplo 6 (Diferencial) (ver https://www.youtube.com/watch?v=yYAw79386WI): Deduza a relação entre a rotação de entrada, do eixo motriz, $\omega_{(motor)}$ e as rotações de saída do diferencial, dos eixos das rodas, Ω_1 e Ω_2. Use os desenhos esquemáticos de um diferencial, abaixo.





Resolução:

Chamando de Ω a velocidade angular da barra *AO*, girando em torno do eixo vertical definido pelos pontos *C* e *D*, e ω a velocidade angular relativa da engrenagem *III*, em relação ao eixo *AO*, podemos escrever usando a primeira figura:



$$v_E = \omega_1 R = v_A + \omega r = \Omega R + \omega r \Rightarrow \omega r = (\omega_1 - \Omega)R$$

$$v_B = \omega_2 R = v_A - \omega r = \Omega R - \omega r \Rightarrow \omega r = (-\omega_2 + \Omega)R$$

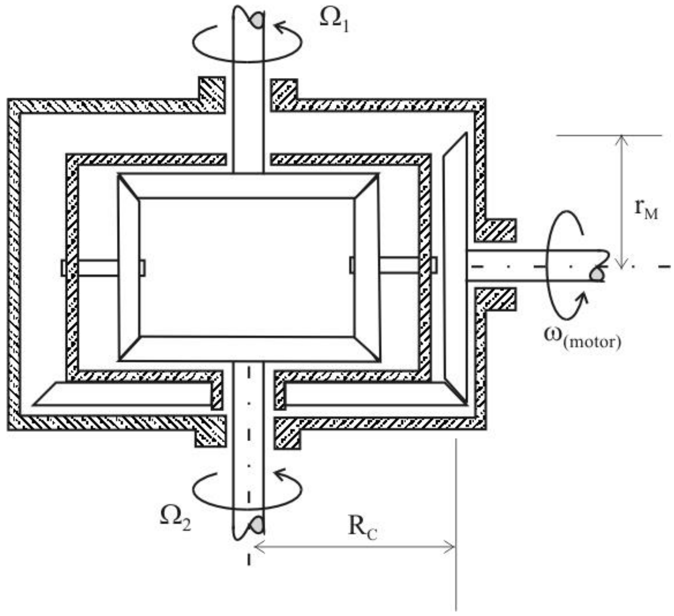
Assim:

$$\omega_1 - \Omega = -\omega_2 + \Omega \Rightarrow \boldsymbol{\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}$$

Para o segundo desenho:

$\Omega R_C = \omega_{(motor)} r_M \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{(motor)} = \frac{(\boldsymbol{\Omega_1} + \boldsymbol{\Omega_2})}{\mathbf{2}} \frac{\boldsymbol{R_C}}{\boldsymbol{r_M}}$

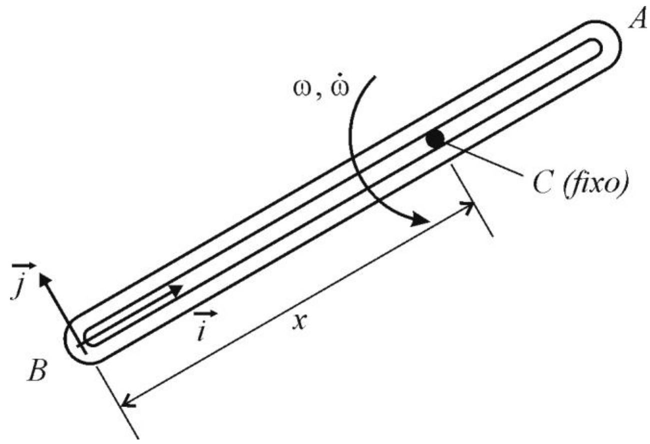


Exemplo 7 (questão de prova, 1980): A barra retilínea *AB*, indicada na figura, move-se de maneira que o pino *C* (fixo) percorre o interior de um rasgo nela existente. São dados:

i) a velocidade $v\vec{\imath}$ e a aceleração $\dot{v}\vec{\imath}$ do ponto *C* relativas à barra; e

ii) a velocidade e a aceleração angulares absolutas, ω e $\dot{\omega}$, da barra.

Determine, em função de $v, \dot{v}, \omega, \dot{\omega}$ e x, usando os versores $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:



a) $\vec{v}_{C,a}$

b) $\vec{a}_{C,c}$

c) $\vec{a}_{C,a}$

d) $\vec{a}_B$

Resolução:

a) $\vec{v}_C = \vec{0}$ e $\vec{v}_{C,r} = v\vec{\imath} \Rightarrow \vec{v}_{C,a} = \vec{v}_C - \vec{v}_{C,r} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_{C,a} = -v\vec{\imath}}$

b) $\vec{a}_{C,c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{C,r} = 2\omega\vec{k} \wedge v\vec{\imath} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_{C,c} = 2\omega v\vec{\jmath}}$

c) $\vec{a}_C = \vec{0}$; assim:

$$\vec{a}_{C,a} = \vec{a}_C - \vec{a}_{C,r} - \vec{a}_{C,c} = \vec{0} - \dot{v}\vec{\imath} - 2\omega v\vec{\jmath} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_{C,a} = -\dot{v}\vec{\imath} - 2\omega v\vec{\jmath}}$$

d) $\vec{a}_{B,r} = \vec{0}$; $\vec{a}_{B,c} = 2\vec{\omega} \wedge \underbrace{\vec{v}_{B,r}}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$$\vec{a}_{B,a} = \vec{a}_{C,a} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - C) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - C)] =$$

$$= (-\dot{v}\vec{\imath} - 2\omega v\vec{\jmath}) + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (-x\vec{\imath}) + \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (-x\vec{\imath})\right] =$$

$$= (\omega^2 x - \dot{v})\vec{\imath} - (2\omega v + x\dot{\omega})\vec{\jmath}$$

Assim:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B,r} + \vec{a}_{B,a} + \vec{a}_{B,c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_B = (\omega^2 x - \dot{v})\vec{\imath} - (2\omega v + x\dot{\omega})\vec{\jmath}}$$