Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e medida exterior

Vimos que a pré-medida de Lebesgue definida na álgebra $\mathcal{A}$ das uniões finitas de intervalos $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$ estende-se a uma medida completa numa σ-álgebra $\mathcal{L}$ que contém os borelianos. Chamaremos $\mathcal{L}$ de σ-álgebra de Lebesgue.
Análogamente, podemos proceder em $\mathbb{R}^2$ com os retângulos semi abertos e também nos retângulos $[a, b] \times [c, d]$. No que segue trabalharemos em $\mathbb{R}$, mas será facilmente generalizável a $\mathbb{R}^n$.
O que acontece se definirmos a pré-medida de Lebesgue nas famílias $\mathcal{F}_1$ dada pela união finita de intervalos abertos (a, b), $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ e $\mathcal{F}_2$ dada pela união finita de intervalos fechados $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$? Chegaremos à mesma medida? Note que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ não são álgebras.
Designaremos por λ_i^* a medida exterior associada à pré-medida de Lebesgue na família $\mathcal{F}_i$. Temos:

Proposição 1. $\lambda_2^* \leq \lambda_1^*$

Demonstração. Com efeito, $\lambda_i^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i(E_{i,j}) \mid A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_{i,j}\}$ onde $A \subset \mathbb{R}$ e $E_{i,j} \in \mathcal{F}_i$, por definição, com $E_{1,j} = (a_j, b_j)$ *e* $E_{2,j} = [a_j, b_j]$. Também, se $A \subset \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$ então $A \subset \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j) \subset \cup_{j=1}^{\infty}[a_j, b_j]$. Por definição das pré-medidas, $\lambda_1((a_j, b_j)) = \lambda_2([a_j, b_j]) = b_j - a_j$, logo:

$$\lambda_1^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_1((a_j, b_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_2([a_j, b_j])$$

Portanto, mostramos que para cada cobertura de A por uniões de intervalos abertos temos uma cobertura por uniões de intervalos fechados, e com *mesma pré-medida*. Assim $\lambda_2^*(A) \leq \lambda_1^*(A)$. □

Proposição 2. $\lambda_2^* \geq \lambda_1^*$

Demonstração. Se isso fosse falso, existiria $A \subset \mathbb{R}$ com $\lambda_1^*(A) - \lambda_2^*(A) = \alpha > 0$. Por definição de λ_2^*, existem $[a_j, b_j]$ com:

1. $A \subset \cup_{j=1}^{\infty}[a_j, b_j]$
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_2([a_j, b_j]) \leq \lambda_2^*(A) + \frac{\alpha}{4}$

Mas $\cup_{j=1}^{\infty}[a_j, b_j] \subset \cup_{j=1}^{\infty}(a_j - \frac{\alpha}{2^{j+2}}, b_j + \frac{\alpha}{2^{j+2}})$. Chamando $A_{j,\alpha} = (a_j - \frac{\alpha}{2^{j+2}}, b_j + \frac{\alpha}{2^{j+2}})$, temos que $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_{j,\alpha}$, portanto:

$$\lambda_2^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_1(A_{j,\alpha}) = \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) + \frac{\alpha}{2}$$

Mas, pela propriedade (2), sabemos que $\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) + \frac{\alpha}{2} \leq \lambda_2^*(A) + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} = \lambda_2^*(A) + \frac{3}{4}\alpha$, e assim:

$$\lambda_2^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_1^*(A_{j,\alpha}) \ \leq \ \lambda_2^*(A) + \frac{3}{4}\alpha \leq \lambda_1^*(A)$$

Isto é absurdo porque teríamos uma cobertura de A por abertos $\cup_{j=1}^{\infty} A_{j,\alpha}$ com valor menor do que o ínfimo.
Portanto, não existe A tal que $\lambda_1^*(A) > \lambda_2^*(A)$. Assim, $\lambda_2^*(A) \leq \lambda_1^*(A)$. □

Corolário. *Se tomarmos* λ_3^* *a medida exterior associada à pré-medida* λ_3 *sobre a álgebra das uniões finitas de intervalos semi-abertos, temos que* $\lambda_3^* = \lambda_1^* = \lambda_2^*$.

Exercício. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável e $\varepsilon > 0$. Então existe aberto U com:

1. $A \subset U$.
2. $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$.

Exercício. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ com medida finita, $A \subset X$ Lebesgue mensurável e $\varepsilon > 0$. Então existe fechado F com:

1. $F \subset A$.
2. $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$.

Solução: Seja V aberto, $A^c \subset V$, com $\mu(V) \leq \mu(A^c) + \varepsilon$. Pela mensurabilidade temos $\mu(A^c) + \mu(A) = \mu(X)$ e $\mu(V^c) + \mu(V) = \mu(X)$. Seja $F = V^c$. Então substituindo na desigualdade,
$\mu(X) - \mu(F) \leq \mu(X) - \mu(A) + \varepsilon$. Como $\mu(X)$ é finita, podemos cancelar dos dois lados e temos $-\mu(F) \leq -\mu(A) + \varepsilon$ ou $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$ ou $\varepsilon + \mu(F) \geq \mu(A)$.

Definição: Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que X tem medida σ-finita se existir $\{A_j\}$ sequência de conjuntos mensuráveis com $\mu(A_j) < \infty; \forall\, j \in \mathbb{N}$ e $X = \cup_1^\infty A_j$.
Exemplos: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$, variedades diferenciáveis, subconjuntos de espaços σ-finitos.

Exercício. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset X$ Lebesgue mensurável com $\mu(A) < +\infty$ e $\varepsilon > 0$. Então existe fechado F com:

1. $F \subset A$.
2. $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$.

Solução: trabalhemos em R^+. Considere $X = \cup([n, n+1))$. A seguir considere $A_n = A \cap [n, n+1)$ e aplique os exercícios anteriores.

Definição: Seja X um espaço com uma medida exterior μ^*, e $\mu^*(X) < \infty$. Seja $A \subset X$. Definimos μ_* a **medida interior** do conjunto A por $\mu_*(A) = \mu^*(X) - \mu^*(A^c)$. Esta era a definição de medida interior que Lebesgue usava e que resultava na seguinte definição de conjunto mensurável: A é mensurável se $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.
Esta definição é equivalente à de Caratheodory. Ou seja, a própria definição de mensurabilidade de Caratheodory estabelece a a concordância de medida interior e exterior, e evita a necessidade de falar de medida interior. De qualquer modo ela aparece naturalmente quando aproximamos os conjuntos A pelos fechados (ou também compactos) contidos em A.