Crescimento Endógeno II – Romer (1990)

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Introdução

- Referência:
  - Romer, P. M. (1990). "Endogenous Technological Change." *Journal of Political Economy* 98(5): S71-102.
- Progresso técnico endógeno
  - Inovação ocorre de maneira deliberada
- Firmas buscam realizar inovação, introduzindo novos produtos na economia
  - Investem em pesquisa e desenvolvimento desses produtos
- Quando um novo produto é introduzido, patentes protegem o desenvolvedor
  - Detentor da patente torna-se monopolista daquele novo produto
- Atividade de pesquisa é motivada pela busca por esses lucros extraordinários

Introdução

- Inovação horizontal
  - Introdução de novos produtos na economia
- Função de produção
$$Y = F(K, L, A)$$
  - Retornos constantes em relação a K, L
  - Retornos crescentes em relação a K, L, A
- Como há inovação deliberada, é preciso remunerar o insumo A
  - Em um mundo de concorrência perfeita, valor do produto $<$ pagamento dos fatores
  - Por conta disso, concorrência imperfeita é fundamental

Estrutura do modelo

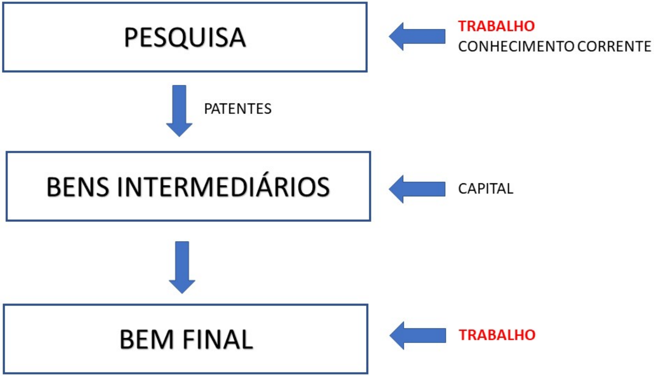
Três setores:

1. Bem final
2. Bens intermediários
3. Pesquisa

- Setor de pesquisa desenvolve novos bens, que estão associados a patentes
- Produtor intermediário compra patente, e passa a ser monopolista desse produto
- Setor do bem final usa conjunto de bens intermediários para produzir

Estrutura do modelo

Figura: Estrutura do modelo



Modelo

- Bem final é produzido usando trabalho e um conjunto de insumos diferenciados (bens intermediários):

$$Y = L_Y^{1-\alpha}(x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_A^\alpha) = L_Y^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{A} x_i^\alpha$$

  - L_Y : trabalho alocado na produção do bem final
  - x_i : quantidade do bem intermediário $i \in \{1, 2, ..., A\}$ usado na produção do bem final
- Conjunto de bens diferenciados $\{1, 2, ..., A\}$
  - Introdução de novos bens corresponde a um aumento em A
- Note que x_i está elevado à potência $\alpha \in (0, 1)$
  - Bens intermediários não entram como substitutos perfeitos na função de produção
  - Aumentar A contribui para elevar o produto

Bem Final

- Apenas para ilustrar, suponha $x_i = x$

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{A} x_i^\alpha = L_Y^{1-\alpha} A x^\alpha$$

- Divida a quantidade de cada insumo por dois, mas dobre a gama de insumos (isso mantém o custo da firma produtora do bem final):

$$\begin{aligned} Y' &= L_Y^{1-\alpha}(2A)\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha = 2^{1-\alpha} L_Y^{1-\alpha} A x^\alpha \\ &> Y, \text{ dado } \alpha \in (0,1) \end{aligned}$$

- Logo, produto aumenta quando a gama de bens intermediários cresce
  - No modelo, crescimento advém da introdução de novos bens (desenvolvidos no setor de pesquisa)
  - Progresso técnico endógeno

Bem Final

- Agora considere um contínuo de bens intermediários: $i \in [0, A]$

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_i^\alpha di$$

  - Trocar soma por integral
  - Interpretação continua a mesma
- Introduzindo índice t, representando o tempo

$$Y_t = L_{Yt}^{1-\alpha} \int_0^{A_t} x_{it}^\alpha di$$

  - A_t cresce ao longo do tempo
  - $t \in [0, \infty)$ – tempo contínuo

Bem Final

- Setor do bem final é caracterizado por concorrência perfeita
  - Firmas tomam preços como dados
    - p_{it} : preço do bem intermediário $i \in [0, A_t]$
    - w_t : salário
    - Preço do produto final normalizado em 1
  - Decidem quanto produzir e contratar de insumos
- Problema da firma:

$$\max_{L_{Yt}, \{x_{it}\}_{i \in [0, A_t]}} L_{Yt}^{1-\alpha} \int_0^{A_t} x_{it}^{\alpha} di - w_t L_{Yt} - \int_0^{A_t} p_{it} x_{it} di$$

- Condições de primeira ordem:

$$x_{it} : \alpha L_{Yt}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha-1} - p_{it} = 0$$

$$L_{Yt} : (1-\alpha) L_{Yt}^{-\alpha} \int_0^{A_t} x_{it}^{\alpha} di - w_t = 0$$

Bem Final

- Demanda de trabalho pelo setor do bem final:

$$w_t = (1-\alpha)L_{Yt}^{-\alpha}\int_0^{A_t} x_{it}^{\alpha} di \tag{1}$$

- Demanda pelo bem intermediário i:

$$\alpha L_{Yt}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha-1} = p_{it} \tag{2}$$

$$x_{it} = \left(\frac{p_{it}}{\alpha L_{Yt}^{1-\alpha}}\right)^{1/(\alpha-1)}$$

- Curva de demanda isoelástica. Aplique logs:

$$\ln x_{it} = \frac{1}{\alpha-1}\{\ln p_{it} - \ln(\alpha L_{Yt}^{1-\alpha})\}$$

- Elasticidade-preço da demanda pelo produto i

$$\varepsilon_d = -\frac{d\ln x_{it}}{d\ln p_{it}} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Bens intermediários

- Produtor do bem i é monopolista
  - Monopólio garantido por uma patente perpétua
- Mas, para começar a produzir o bem, precisa adquirir patente gerada no setor de pesquisa
  - Paga uma única vez pela patente
  - Pode utilizá-la infinitas vezes

Decisão em dois estágios:

1. Comprar patente
2. Caso adquira patente, quanto produzir e que preço cobrar

Bens intermediários

Segundo Estágio (caso possua patente)

- Produto gerado utilizando apenas de capital
- Função de produção linear:

$$x_{it} = \frac{1}{\eta} k_{it}$$

  - k_{it} : quantidade de capital utilizada pelo produtor do bem i
  - Por simplicidade, suponha $\eta = 1$
- Custo do produtor $i = C_i = rk_i$
  - r : taxa de aluguel do capital/taxa de juros (depreciação nula)
  - Custo marginal $= r$
- Produtor do bem i escolhe preço e quantidade, de modo a maximizar lucro
  - Como é monopolista, sua restrição é a curva de demanda de i – equação (2)

Bens intermediários

- Problema do produtor do bem intermediário i (segundo estágio)

$$\max_{p_{it}, x_{it}} \left\{ p_{it} x_{it} - r_t \underbrace{k_{it}}_{= x_{it}} : p_{it} = \alpha L_{Yt}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha - 1} \right\}$$

- Substituindo a restrição:

$$\max_{x_{it}} \left\{ \alpha L_{Yt}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha} - r_t x_{it} \right\}$$

- Condição de primeira ordem:

$$\alpha \left[\underbrace{\alpha L_{Yt}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha - 1}}_{= p_{it}} \right] - r_t = 0$$

- Logo:

$$p_{it} = p_t = \frac{r_t}{\alpha}$$

Bens intermediários

- Como $\alpha \in (0,1)$, produtor cobra preço acima do custo marginal r (monopolista)
- Todos os produtores cobram o mesmo preço
  - Mesmo custo marginal
  - Mesma elasticidade da demanda (portanto, mesmo markup)
- Logo, produzem mesma quantidade: $x_{it} = x_t$
- Têm mesmo lucro

$$\pi_t = p_t x_t - r_t x_t = (p_t - r_t) x_t$$

- Como $r_t = \alpha p_t$, então:

$$\pi_t = (1-\alpha) p_t x_t$$

- Usando a demanda pelo bem intermediário $p_t = \alpha L_{Yt}^{1-\alpha} x_t^{\alpha-1}$, segue que:

$$\pi_t = (1-\alpha)[\alpha L_{Yt}^{1-\alpha} x_t^{\alpha-1}] x_t = (1-\alpha)\alpha L_{Yt}^{1-\alpha} x_t^{\alpha}$$

Aquisição de patente

Primeiro Estágio

- Firma decide se adquire ou não patente em t
  - Precisa despender P_{At} uma única vez em t (preço da patente)
- A patente dá direito a um fluxo de lucros futuros, induzidos pelo poder de monopólio
  - Patente perpétua, dando direito a esses lucros do período t em diante
- Em tempo contínuo, esse valor é:

$$V_t = \int_t^{\infty} \exp\left\{-\int_t^s r_\tau d\tau\right\} \pi_s ds$$

Aquisição de patente

- Há livre entrada de potenciais empreendedores, que podem fazer ofertas para adquirir a patente
- Competição entre empreendedores faz com que preço da patente seja igual ao valor presente dos lucros futuros
  - Se preço da patente fosse menor que v.p. dos lucros futuros, algum empreendedor poderia oferecer um preço um pouco maior
- Portanto:

$$P_{At} = V_t = \int_t^{\infty} \exp\left\{-\int_t^s r_\tau d\tau\right\} \pi_s ds$$

- Para referência futura, se $\pi_t = \pi$ e $r_t = r$ constantes no tempo:

$$V_t = \frac{\pi}{r}$$

- Usando a expressão para o lucro π, encontrada anteriormente (volte 2 slides)

$$P_{At} = P_A = \frac{(1-\alpha)\alpha L_Y^{1-\alpha} x^\alpha}{r} \tag{3}$$

Setor de pesquisa

- Gera conhecimento novo utilizando trabalho (pesquisadores)
  - Setor desenvolve ideias para novos bens
  - Produto do setor = adição de novos bens ($\dot{A}_t$)
  - Esse processo gera patentes, que são vendidas aos potenciais empreendedores do setor de bens intermediários
- Pesquisadores podem utilizar todo o conhecimento corrente (A_t) para gerar conhecimento novo
  - Aumenta a produtividade da pesquisa corrente
  - Externalidade
- Função de produção de conhecimento novo

$$\dot{A}_t = \lambda A_t L_{At}$$

  - L_{At} : trabalhadores alocados ao setor de pesquisa

Setor de pesquisa

- Firmas no setor atuam em concorrência perfeita:
  - Tomam P_{At} e w_t como dados
- Lucro de uma empresa no setor de pesquisa

$$P_{At}\lambda A_t L_{At} - w_t L_{At}$$

- Firma escolhe L_{At}. No ótimo:

$$w_t = P_{At}\lambda A_t \tag{4}$$

- Observação: trabalho é móvel entre setores do bem final e pesquisa:
  - Logo, salário praticado nos dois tem que ser o mesmo

Consumidores

- Famílias idênticas distribuídas uniformemente no intervalo $[0,1]$
  - Número de membros da família $= L$ (constante)
- Preferência:
$$\mathbb{U}_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} dt, \ \rho, \gamma > 0$$
- Restrição orçamentária em t:
$$C_t + \dot{K}_t \leq w_t L + r_t K_t + \Pi_t$$
  - Π_t: lucro dos produtores intermediários menos gastos com aquisição de patentes em t
- $K_0 > 0$ dado
- Equação de Euler:
$$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{r_t - \rho}{\gamma}$$

Equilíbrio

- Produto final pode ser usado para consumo ou investimento ($= \dot{K}_t$ dado que depreciação é nula)

$$Y_t = L_{Yt}^{1-\alpha} \int_0^{A_t} x_{it}^{\alpha} di = C_t + \dot{K}_t$$

- Mercado de capital:

$$K_t = \int_0^{A_t} k_{it} di$$

- Mercado de trabalho:

$$L_{Yt} + L_{At} = L$$

  - Força de trabalho constante e igual a L
  - Trabalho móvel entre os setores

Duas observações

- No agregado, estrutura semelhante à do modelo neoclássico de crescimento. Dado $x_{it} = x_t$

$$Y_t = L_{Yt}^{1-\alpha} \int_0^{A_t} x_{it}^{\alpha} di = L_{Yt}^{1-\alpha} A_t x_t^{\alpha}$$

- Da função de produção do bem final:

$$x_{it} = x_t = k_{it}$$

- Há A_t produtores intermediários em t, de modo que $k_{it} = K_t / A_t = x_t$. Substituindo na função de produção:

$$Y_t = L_{Yt}^{1-\alpha} A_t x_t^{\alpha} = L_{Yt}^{1-\alpha} A_t \left(\frac{K_t}{A_t} \right)^{\alpha}$$
$$= L_{Yt}^{1-\alpha} K_t^{\alpha} A_t^{1-\alpha}$$

- Portanto:

$$Y_t = K_t^{\alpha} (A_t L_{Yt})^{1-\alpha}$$

  - Função de produção semelhante à que utilizamos no modelo de Solow
  - Agora A_t gerada endogenamente

Duas observações

- Taxa de crescimento de longo prazo determinada pela quantidade de trabalho alocada no setor de pesquisa
- Da função de produção de pesquisa

$$\dot{A}_t = \lambda A_t L_{At}$$

- Supondo $L_{At} = L_A$ constante no tempo, temos a taxa de crescimento dada por:

$$g = \frac{\dot{A}_t}{A_t} = \lambda L_A$$

- Resta agora determinar a quantidade de trabalho em cada setor – bem final e pesquisa. Lembrando que:

$$L_Y + L_A = L$$

  - L : força de trabalho (constante)

Trajetória de crescimento balanceado

- Taxa de crescimento de A_t constante no tempo:

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = \lambda L_{At}$$

  - Logo, L_A,L_Y são constantes no tempo
- Taxa de crescimento do consumo constante

$$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{r_t - \rho}{\gamma}$$

  - Logo $r_t = r$ constante no tempo:
- $p_t = p, x_t = x, \pi_t = \pi$ também constantes no tempo:

$$p_t = \frac{r_t}{\alpha}$$
$$p_t = \alpha L_{Yt}^{1-\alpha} x_t^{\alpha-1}$$
$$\pi_t = (p_t - r_t) x_t$$

Trajetória de crescimento balanceado

- Portanto, preço da patente é constante e dado pela eq. (3):

$$P_{At} = P_A = \frac{(1-\alpha)\alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha}}{r}$$

- Produto:

$$Y_t = L_{Yt}^{1-\alpha} \int_0^{A_t} x_{it}^{\alpha} di = L_Y^{1-\alpha} A_t x^{\alpha}$$

  - Y e A crescem à mesma taxa

- Da equação de equilíbrio no mercado de capital, com $k_{it} = x_{it} = x$:

$$K_t = \int_0^{A_t} k_{it} di = A_t x$$

  - K também cresce à mesma taxa que A

Trajetória de crescimento balanceado

- Da equação de equilíbrio no mercado de produto:

$$Y_t = C_t + \dot{K}_t$$
$$\frac{Y_t}{K_t} = \frac{C_t}{K_t} + \frac{\dot{K}_t}{K_t}$$

  - Como Y e K crescem à mesma taxa, Y/K constante; $\dot{K}_t/K_t$ também constante no BGP
  - Logo C_t/K_t é constante; C_t e K_t crescem à mesma taxa

- Assim:

$$g = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{\dot{A}_t}{A_t} = \lambda L_A$$

- Falta determinar a distribuição de trabalho de equilíbrio entre setores

Trajetória de crescimento balanceado

- Salário pago no setor do bem final (eq. (1)):

$$w_t = (1-\alpha)L_{Yt}^{-\alpha}\int_0^{A_t} x_{it}^{\alpha}di = (1-\alpha)L_Y^{-\alpha}A_t x^{\alpha}$$

- Salário pago no setor de pesquisa (eqs. (3) e (4)):

$$w_t = P_{At}\lambda A_t = \frac{(1-\alpha)\alpha L_Y^{1-\alpha}x^{\alpha}}{r}\lambda A_t$$

- Igualando:

$$(1-\alpha)L_Y^{-\alpha}A_t x^{\alpha} = \frac{(1-\alpha)\alpha L_Y^{1-\alpha}x^{\alpha}}{r}\lambda A_t$$

$$L_Y^{-\alpha} = \frac{\alpha L_Y^{1-\alpha}}{r}\lambda$$

- Portanto:

$$L_Y = \frac{L_Y^{1-\alpha}}{L_Y^{-\alpha}} = \frac{r}{\alpha\lambda}$$

Taxa de crescimento de longo prazo

- Temos então que:

$$L_Y = \frac{r}{\lambda \alpha}$$

- Além disso, dado que $L_A = L - L_Y$

$$L_A = L - \frac{r}{\lambda \alpha}$$

- E a taxa de crescimento de longo prazo é:

$$g = \frac{\dot{A}_t}{A_t} = \lambda L_A = \lambda \left(L - \frac{r}{\lambda \alpha} \right)$$

$$g = \lambda L - \frac{r}{\alpha}$$

- Taxa de crescimento de longo prazo depende:
  - Positivamente do parâmetro de produtividade do setor de pesquisa λ
  - Positivamente do tamanho do mercado L (efeito escala)

Taxa de crescimento de longo prazo

- Taxa de juros reduz a taxa de crescimento:
  - Diminui v.p. dos lucros futuros e preço da patente
  - Reduz lucratividade do setor de pesquisa e capacidade de atrair trabalhadores
- Outros fatores que reduzam lucratividade do setor de pesquisa têm efeito similar
  - Por exemplo, reduzir a cobertura propiciada pelas patentes
  - Contudo, esses fatores elevam o nível do produto, ao aumentar o emprego no setor do bem final
- Taxa de juros é endógena e função de parâmetros de preferência intertemporal

Taxa de crescimento de longo prazo

- Da equação de Euler

$$g = \frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{r - \rho}{\gamma}$$
$$r = \gamma g + \rho$$

- Substituindo:

$$g = \lambda L - \frac{\gamma g + \rho}{\alpha}$$

- Portanto:

$$g = \frac{\lambda L - \rho/\alpha}{1 + \gamma/\alpha}$$