EEL-USP
Escola de Engenharia de Lorena

LOM3202 – CIRCUITOS ELÉTRICOS
AULA 9

Prof. Dr. Emerson G. Melo

Sumário

- Senoides;
- Fasores;
- Impedância e Admitância;

Senoides

- Senoide é um sinal que possui a forma da função seno ou cosseno;
- Uma corrente senoidal é normalmente conhecida como *corrente alternada* (*CA*);
- Circuitos acionados por fontes de tensão ou corrente senoidais são chamados *circuitos CA (AC)*.
- Vantagens:
  - A natureza apresenta diversos sistemas com comportamento senoidal;
  - Facilidade matemática para lidar com funções senoidais;
  - Simplicidade para analisar sinais através de Séries de Fourier;
  - Menor custo para geração e transmissão de energia.

Senoides

- Senoides são funções periódicas, pois satisfazem a equação $f(t) = f(t + nT)$, para todo t e valores inteiros de n.

$$v(t) = V_m \operatorname{sen} \omega t$$

$$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{1}{T}$$

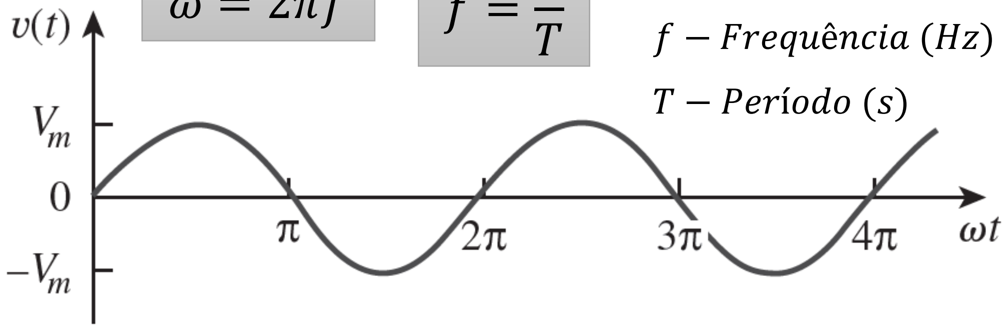
V_m – *Amplitude*

ω – *Frequência angular* (rad/s)

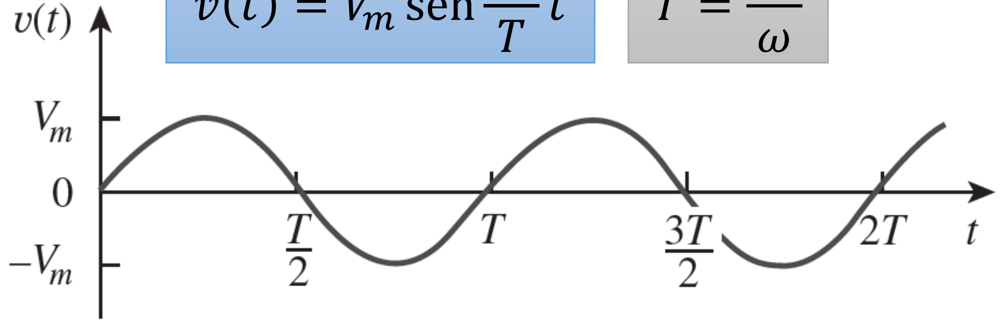
ωt – *Argumento* (rad)

f – *Frequência* (Hz)

T – *Período* (s)



$$v(t) = V_m \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Função Periódica

$$v(t + T) = v(t)$$

$$v(t+T) = V_m \operatorname{sen} \omega(t+T) = V_m \operatorname{sen} \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

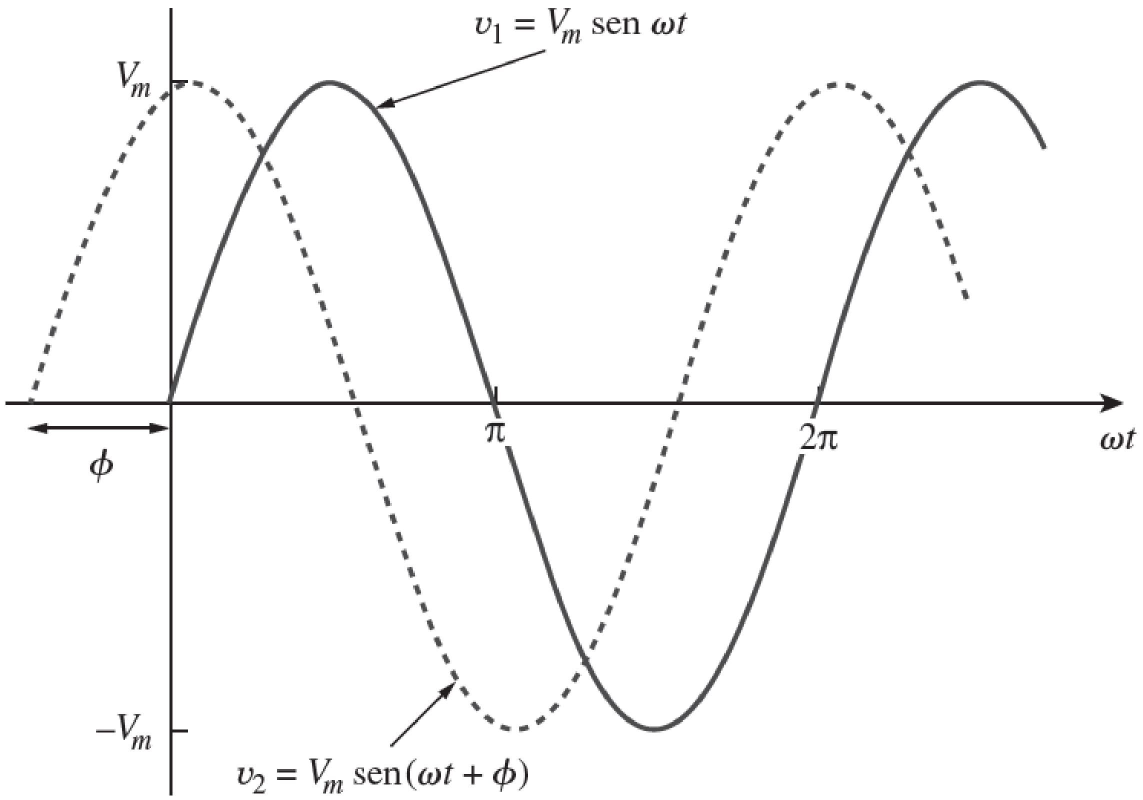
$$V_m \operatorname{sen}(\omega t + 2\pi) = V_m \operatorname{sen} \omega t = v(t)$$

Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

Senoides

- Uma senoide é caracterizada por amplitude, frequência e fase.

$$v_1(t) = V_m \operatorname{sen} \omega t \qquad v_2(t) = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad \phi - Fase\ (rad)$$



Sinais em Fase	$\phi = 0$
Sinais fora de Fase	$\phi \neq 0$
Sinais em Contra-Fase	$\phi = \pi$

Senoides

- Através da fase, funções seno podem ser transformadas em cosseno e vice-versa.

Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen}(\omega t \pm 180°) = \operatorname{sen} \omega t \cos 180° \pm \cos \omega t \operatorname{sen} 180° = -\operatorname{sen} \omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 180°) = \cos \omega t \cos 180° \mp \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} 180° = -\cos \omega t$$

$$\operatorname{sen}(\omega t \pm 90°) = \operatorname{sen} \omega t \cos 90° \pm \cos \omega t \operatorname{sen} 90° = \pm \cos \omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 90°) = \cos \omega t \cos 90° \mp \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} 90° = \mp \operatorname{sen} \omega t$$

Números Complexos

- Conjunto numérico (ℂ) mais abrangente que o dos números Reais (ℝ).
- Compreendem valores compostos por uma parte REAL e uma parte IMAGINÁRIA que representa raízes de números negativos: $i = \sqrt{-1}$.
- Em engenharia utiliza-se j para denotar a parte imaginária, já que i geralmente representa corrente elétrica.

Forma retangular

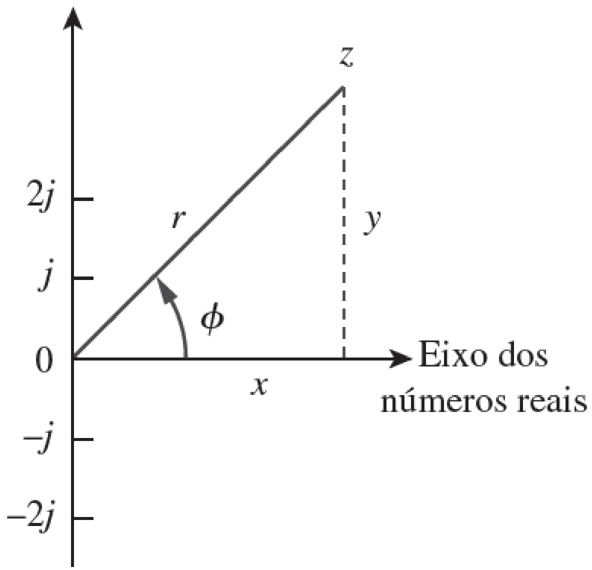
$$z = x + jy$$

Forma polar

$$z = r\angle\emptyset$$

Forma exponencial

$$z = re^{j\emptyset}$$



Relações entre formas retangular, polar e exponencial

$$x = r\cos\emptyset \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\emptyset$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \emptyset = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$z = x + jy = r(\cos\emptyset + j\,\mathrm{sen}\,\emptyset) = re^{j\emptyset}$$

$$\cos\emptyset = Re\{e^{j\emptyset}\} \quad \mathrm{sen}\,\emptyset = Im\{e^{j\emptyset}\}$$

Números Complexos

Operações matemáticas.

Adição e Subtração

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + x_2) - j(y_1 + y_2)$$

Inverso

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\angle - \emptyset$$

Raiz Quadrada

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\angle\emptyset/2$$

Multiplicação e Divisão

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \emptyset_1 + \emptyset_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\emptyset_1 - \emptyset_2$$

Complexo Conjugado

$$z = x + jy = r\angle\emptyset = re^{j\emptyset}$$

$$z^* = x - jy = r\angle - \emptyset = re^{-j\emptyset}$$

Fasor

- Fasor é uma representação complexa de uma senoide.

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \emptyset) = Re\left(V_m e^{j(\omega t+\emptyset)}\right) = Re\left(V_m e^{j\emptyset} e^{j\omega t}\right)$$

Relação de Euler

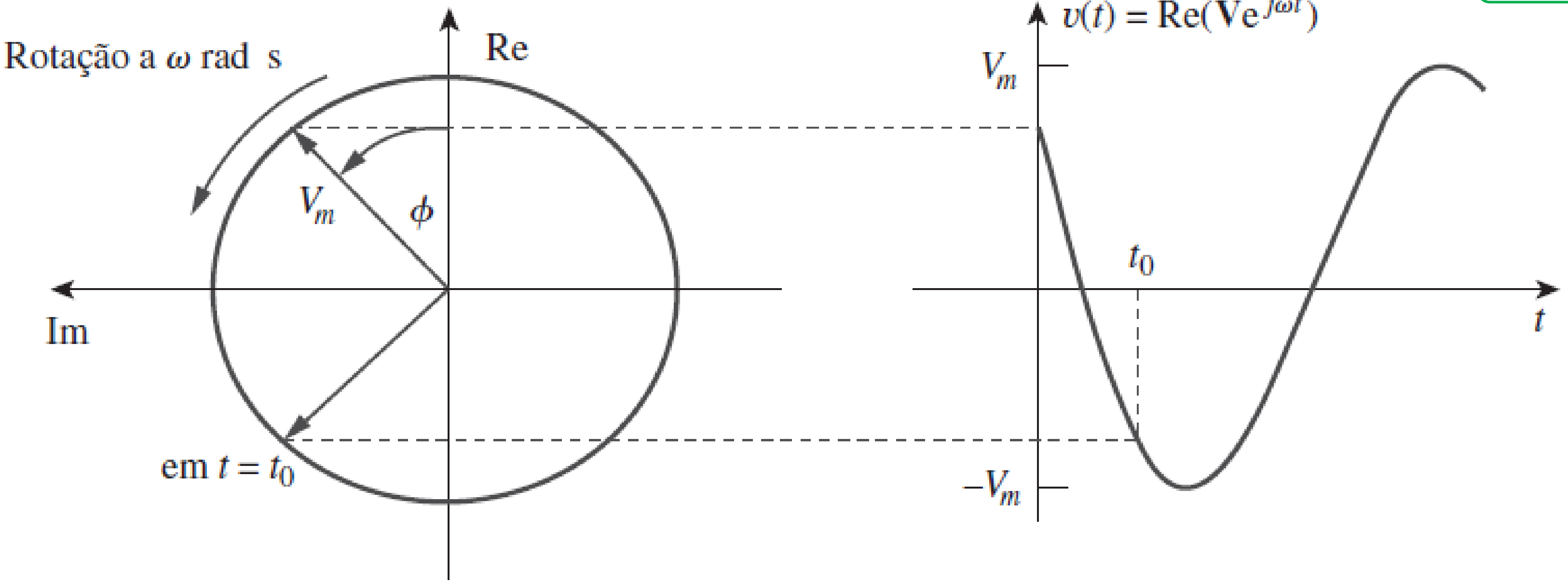
$$e^{j\emptyset} = \cos\emptyset + j\,\mathrm{sen}\,\emptyset$$

$$\mathbb{V} = V_m e^{j\emptyset} = V_m \angle \emptyset$$

$$v(t) = Re\left(\mathbb{V} e^{j\omega t}\right)$$

Fase da Parte Imaginária

$$\pm j = 1\angle \pm 90°$$



Fasor

Representação Temporal e Representação Fasorial.

Representação Temporal

Representação Fasorial

Conversão para cosseno

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \emptyset)$$

$$\mathbb{V} = V_m \angle \emptyset$$

$$v(t) = V_m \,\mathrm{sen}(\omega t + \emptyset) = V_m \cos(\omega t + \emptyset - 90)$$

$$\mathbb{V} = V_m \angle \emptyset - 90$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta\,)$$

$$\mathbb{I} = I_m \angle \theta$$

$$i(t) = I_m \,\mathrm{sen}(\omega t + \theta\,) = I_m \cos(\omega t + \emptyset - 90)$$

$$\mathbb{I} = I_m \angle \theta - 90$$

Domínio do Tempo

Domínio da Frequência

Fasor

Representação Temporal e Representação Fasorial.

Representação Temporal

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\omega V_m \,\text{sen}(\omega t + \emptyset)$$

Representação Fasorial

$$\frac{d\mathbb{V}e^{j\omega t}}{dt} = j\omega\mathbb{V}e^{j\omega t}$$

$$j\omega = \omega\angle 90$$

$$Re\left(\mathbb{V}e^{j\omega t}\right) = V_m \cos(\omega t + \emptyset) = V_m\angle\omega t + \emptyset$$

$$j\omega\mathbb{V}e^{j\omega t} = \omega\angle 90 \times V_m\angle\omega t + \emptyset = \omega V_m\angle\omega t + \emptyset + 90$$

$$\omega V_m \cos(\omega t + \emptyset + 90) = -\omega V_m \,\text{sen}(\omega t + \emptyset)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega\mathbb{V}$$

Domínio do Tempo

$$\int v(t)\,dt \Leftrightarrow \frac{\mathbb{V}}{j\omega}$$

Domínio da Frequência

Exemplo de Aplicação

- Determine a corrente em um circuito descrito pela equação:

$$4i + 8\int i(t)dt - 3\frac{di(t)}{dt} = 50\cos(2t + 75°)$$

$$i = 1 + j0 = 1\angle 0° = \mathbb{I}$$

$$\int i(t)dt = \frac{\mathbb{I}}{j\omega}$$

$$\frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega\mathbb{I}$$

$$50\cos(2t + 75°) = 50\angle 75°$$

$$4\mathbb{I} + 8\frac{\mathbb{I}}{j\omega} - 3j\omega\mathbb{I} = 50\angle 75°$$

$$\omega = 2\ Hz$$

Nesse caso ω é conhecido, então é possível obter uma solução particular.

$$4\mathbb{I} + 8\frac{\mathbb{I}}{j2} - 3j2\mathbb{I} = 50\angle 75°$$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\mathbb{I}(4 - j4 - j6) = 50\angle 75°$$

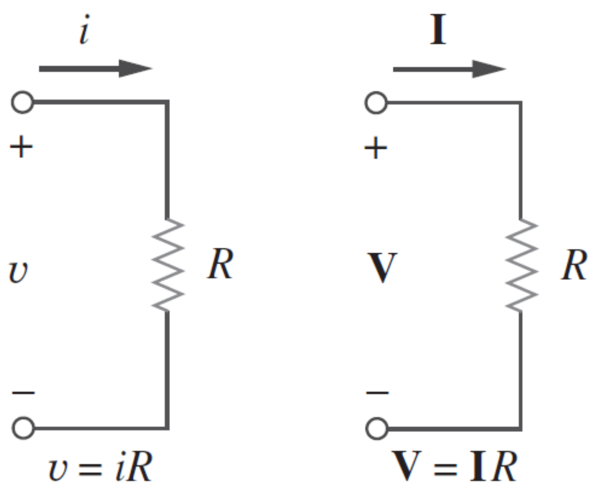
$$\mathbb{I}(10{,}77\angle -68{,}2°) = 50\angle 75°$$

$$\mathbb{I} = \frac{50\angle 75°}{10{,}77\angle -68{,}2°} = 4{,}642\angle 143{,}2°\ A$$

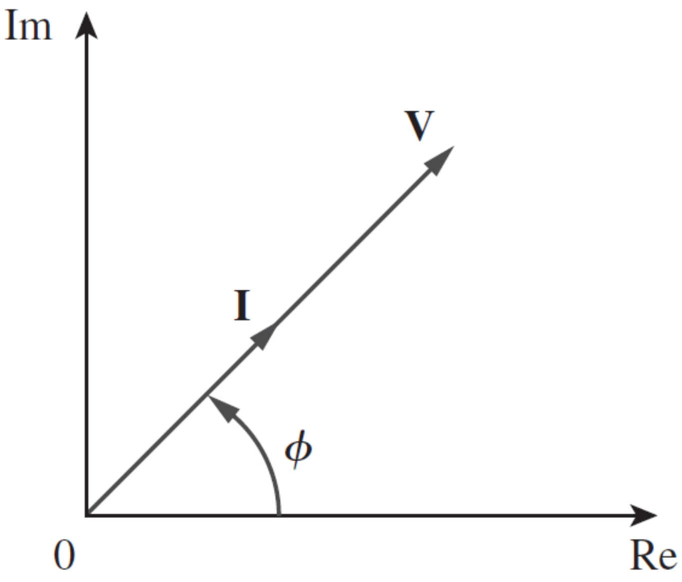
$$i(t) = 4{,}642\cos(2t + 143{,}2°)\ A$$

Fasores e Elementos de Circuito

Representação da corrente e tensão no RESISTOR.



$\mathbb{V} = R\mathbb{I}$



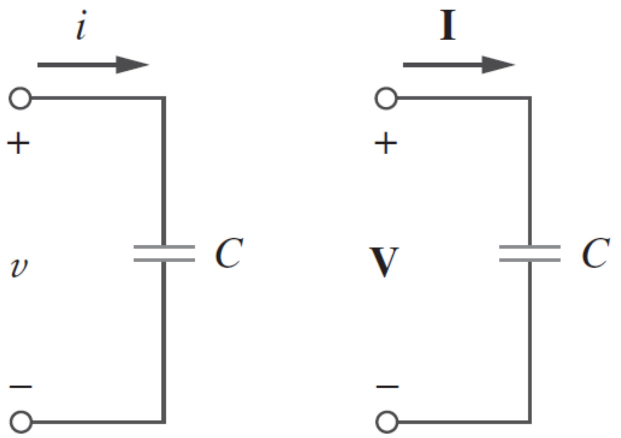
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \emptyset) \Leftrightarrow I_m \angle \emptyset = \mathbb{I}$$

$$v(t) = RI_m \cos(\omega t + \emptyset) \Leftrightarrow \mathbb{V} = R\mathbb{I}$$

Tensão e Corrente estão em FASE

Fasores e Elementos de Circuito

Representação da corrente e tensão no Capacitor.



$i = C\dfrac{dv}{dt}$ $\qquad$ $\mathbf{I} = j\omega C\,\mathbf{V}$

$$\mathbb{V} = \frac{\mathbb{I}}{j\omega C}$$

$$\mathbb{V} = -j\frac{\mathbb{I}}{\omega C}$$

$$\pm j = 1\angle \pm 90°$$

$$\mathbb{V} = -j\frac{I_m\angle\emptyset}{\omega C}$$

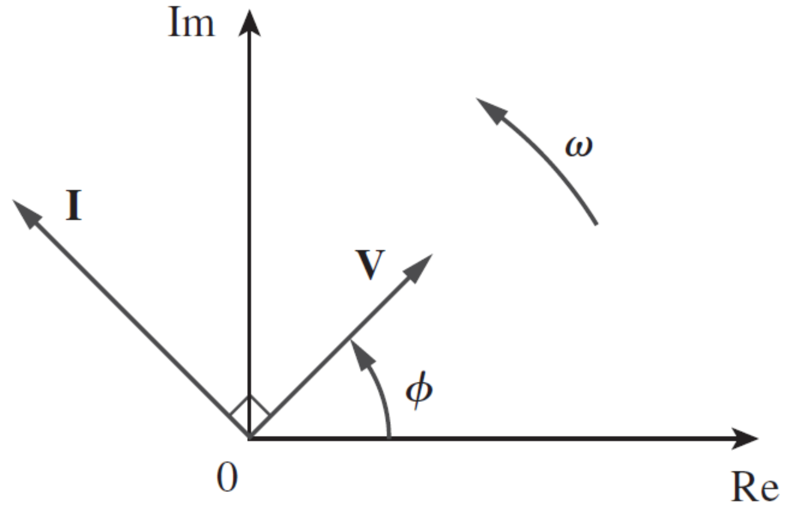
$$\mathbb{V} = \frac{I_m\angle\emptyset \times 1\angle - 90°}{\omega C}$$

$$\mathbb{V} = \frac{I_m\angle\emptyset - 90°}{\omega C}$$

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \emptyset) \Leftrightarrow V_m\angle\emptyset = \mathbb{V}$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow \mathbb{I} = Cj\omega\mathbb{V} \Leftrightarrow \mathbb{V} = \frac{\mathbb{I}}{j\omega C}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega\mathbb{V}$$

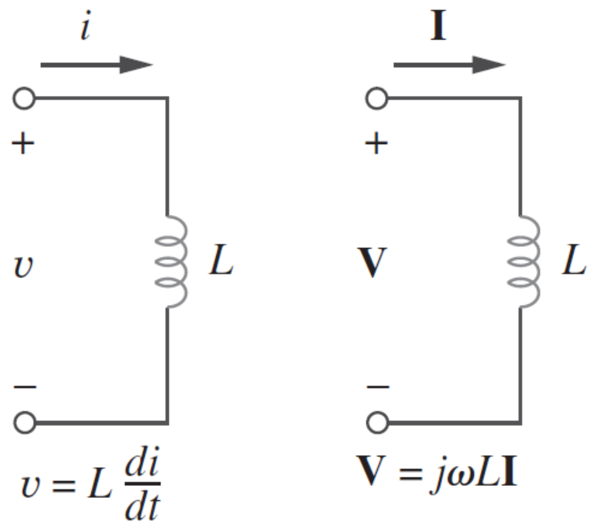


A tensão no capacitor está atrasada em 90°

Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

Fasores e Elementos de Circuito

Representação da corrente e tensão no INDUTOR.



$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \emptyset) \Leftrightarrow I_m\angle\emptyset = \mathbb{I}$$

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \Leftrightarrow \mathbb{V} = j\omega L\mathbb{I}$$

$$\frac{di}{dt} \Leftrightarrow j\omega\mathbb{I}$$

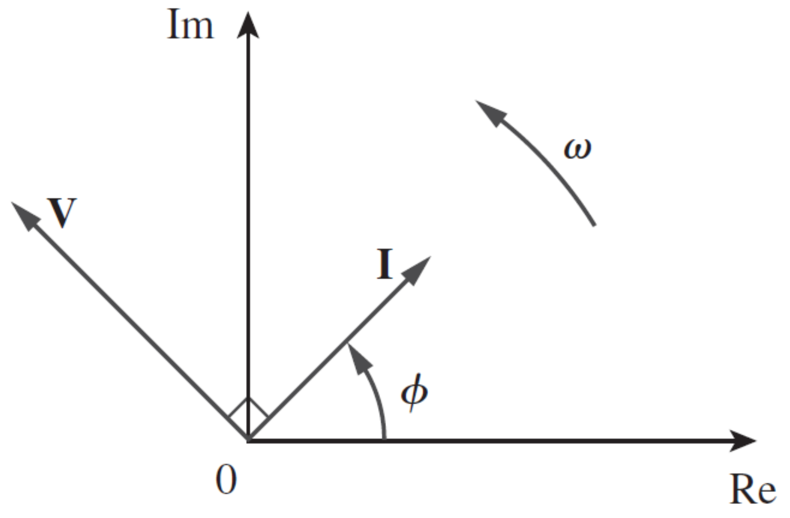
$$\boxed{\mathbb{V} = j\omega L\mathbb{I}}$$

$$\boxed{\pm j = 1\angle \pm 90°}$$

$$\mathbb{V} = j\omega L I_m\angle\emptyset$$

$$\mathbb{V} = \omega L I_m\angle\emptyset \times 1\angle 90°$$

$$\mathbb{V} = \omega L I_m\angle\emptyset + 90°$$

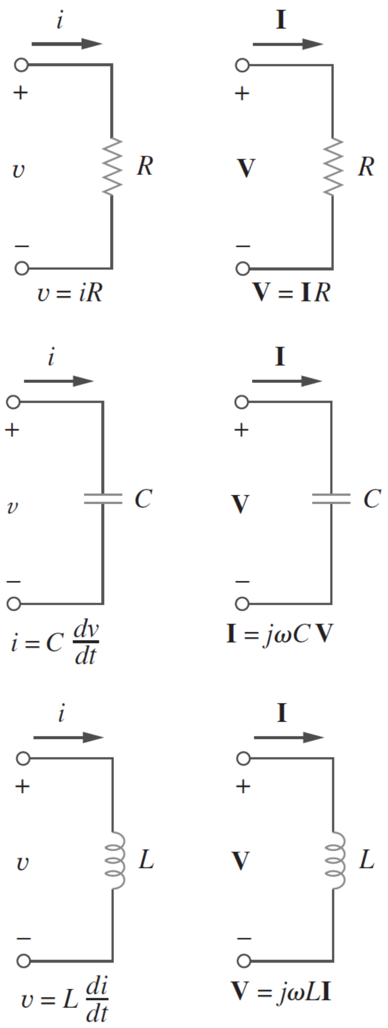


A tensão no indutor está adiantada em 90°

Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

❑ Resumo.

Domínio do Tempo	Domínio da Frequência
$v(t) = Ri(t)$	$\mathbb{V} = R\mathbb{I}$
$i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$	$\mathbb{V} = \dfrac{\mathbb{I}}{j\omega C}$
$v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$\mathbb{V} = j\omega L\mathbb{I}$



Exemplo de Aplicação

- Determine a corrente em regime estacionário sobre um indutor de 0,1 H quando submetido a uma tensão $v(t) = 12\cos(60t + 45°)\ V$.

$$\omega = 60\, rad/s$$

$$\mathbb{V} = 12\angle 45°$$

$$\boxed{\mathbb{V} = j\omega L\mathbb{I}} \qquad \mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}}{j\omega L} \qquad \mathbb{I} = \frac{12\angle 45°}{j60 \times 0{,}1} = \frac{12\angle 45°}{6\angle 90°} = 2\angle -45°\ \ A$$

$$\boxed{i(t) = 2\cos(60t - 45°)\ \ A}$$

Impedância

- Impedância ($\boldsymbol{Z}$) é a relação entre a tensão fasorial e a corrente fasorial de um circuito, medida em Ω;
- A impedância depende da frequência.

$\boldsymbol{Z}_R = R$

$\mathbb{V} = R\mathbb{I}$

$\boldsymbol{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C}$

$\mathbb{V} = \dfrac{\mathbb{I}}{j\omega C}$

$\mathbb{V} = \boldsymbol{Z}\mathbb{I}$

$\boldsymbol{Z}_L = j\omega L$

$\mathbb{V} = j\omega L\mathbb{I}$

$$\boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{Z}|\angle\emptyset$$

$$\boldsymbol{Z} = R + jX$$

$$R = Re\{\boldsymbol{Z}\} = Resistência$$

$$X = Im\{\boldsymbol{Z}\} = Reatância$$

$$\boldsymbol{Z} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\emptyset = \tan^{-1}\frac{X}{R}$$

$$R = |\boldsymbol{Z}|\cos\emptyset \qquad X = |\boldsymbol{Z}|\,\mathrm{sen}\,\emptyset$$

CC: $\omega \to 0$	CA: $\omega \to \infty$
$\boldsymbol{Z}_R = R$	$\boldsymbol{Z}_R = R$
$\boldsymbol{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C} \to \infty$	$\boldsymbol{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C} \to 0$
$\boldsymbol{Z}_L = j\omega L \to 0$	$\boldsymbol{Z}_L = j\omega L \to \infty$

Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

Admitância

- Admitância ($\boldsymbol{Y}$) é o inverso da impedância, medida em Siemens ($\boldsymbol{S}$);

$$\boxed{\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}}}$$

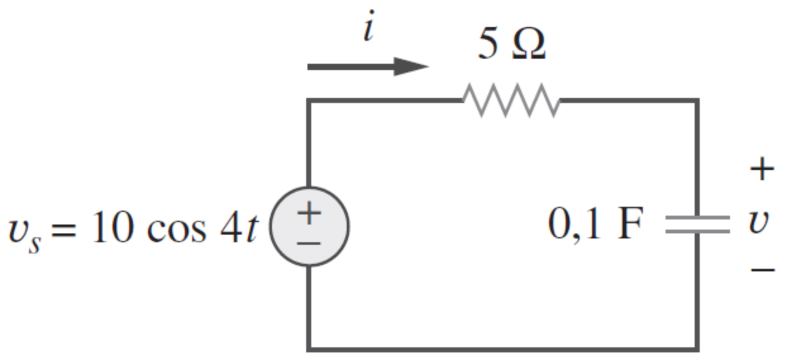
$$\boldsymbol{Y} = G + jB$$

$$\boxed{G = Re\{\boldsymbol{Y}\} = Condutância}$$

$$\boxed{B = Im\{\boldsymbol{Y}\} = Susceptância}$$

Exemplo de Aplicação

- Calcular $\boldsymbol{Z}$, $v(t)$ e $i(t)$ no circuito abaixo.



$$\omega = 4\, rad/s$$

$$\mathbb{V}_S = 10\angle 0°$$

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_R + \boldsymbol{Z}_C = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\boldsymbol{Z} = 5 + \frac{1}{j4 \times 0{,}1} = \frac{1}{j0{,}4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Z} = 5 - j2{,}5\ \Omega}$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}_S}{\boldsymbol{Z}} = \frac{10\angle 0°}{5 - j2{,}5} = \frac{10\angle 0°}{5{,}59\angle -26{,}57°}$$

$$\boxed{\mathbb{I} = 1{,}789\angle 26{,}57°\ A}$$

$$\mathbb{V} = \mathbb{I}\boldsymbol{Z}_C = \frac{1{,}789\angle 26{,}57°}{j4 \times 0{,}1} = \frac{1{,}789\angle 26{,}57°}{0{,}4\angle 90°}$$

$$\boxed{\mathbb{V} = 4{,}47\angle -63{,}43°}$$

$$\boxed{i(t) = 1{,}789 \cos(4t + 26{,}57°)\ \ A}$$

$$\boxed{v(t) = 4{,}47 \cos(4t - 63{,}43°)\ \ V}$$

A tensão no capacitor está atrasada em 90°

Exercícios Propostos

- 1 – Calcule os números complexos.

- (a) $\left[(5+j2)(-1+j4)-5\angle 60^{\circ}\right]^{*}$
- (b) $\dfrac{10+j5+3\angle 40^{\circ}}{-3+j4}+10\angle 30^{\circ}+j5$

Respostas:

- (a) $-15{,}5-j13{,}67$
- (b) $8{,}293+j7{,}2$

Exercícios Propostos

2 – Represente com notação fasorial.

- (a) $v(t) = 7\cos(2t + 40°)\ V$
- (b) $i(t) = -4\,\mathrm{sen}(10t + 10°)\ A$

Respostas:

- (a) $\mathbb{V} = 5\angle 40°\ V$
- (b) $\mathbb{I} = 4\angle 100°\ A$

Exercícios Propostos

- 3 – Determine as senoides representadas pelos seguintes fasores:

- (a) $\mathbb{V} = -25\angle 40°\ V$
- (b) $\mathbb{I} = j(12 - j5)\ A$

Respostas:

- (a) $v(t) = 25\cos(\omega t - 140°)\ \ V$
- (b) $i(t) = 13\cos(\omega t + 67{,}38°)\ \ A$

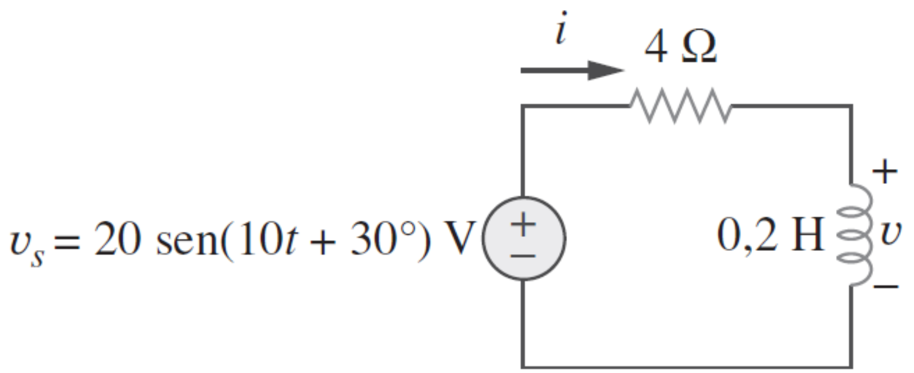
Exercícios Propostos

- 4 – Determine a corrente em regime estacionário sobre um capacitor de $50\ \mu F$ quando submetido a uma tensão $v(t) = 10\cos(100t + 30°)\ V$.

Resposta: $i(t) = 50\cos(100t + 120°)\ A$

Emerson G. Melo – Departamento de Engenharia de Materiais - Polo Urbo-Industrial, Gleba AI-6, Lorena, SP 12612-550, Brasil

- 5 – Calcular $\boldsymbol{Z}$,a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ no indutor.



- Resposta: $v(t) = 8{,}94\,\text{sen}(10t + 93{,}43°)\ V$

$$i(t) = 4{,}47\,\text{sen}(10t + 3{,}43°)\ A$$

Referências Bibliográficas

- J. W. Nilsson, e S. A. Riedel, “Electric Circuits”, 9 ed., New York, Prentice Hall (2011).
- W. H. Hyat, J. E. Kemmerly, e S. M Durbin, “Análise de Circuitos em Engenharia”, 7 ed., São Paulo, McGraw-Hill (2008).
- C. K. Alexander, e M. N. O. Sadiku, “Fundamentos de Circuitos Elétricos”, 5 ed., Porto Alegre, AMGH (2013).
- M. N. O. Sadiku, “Elementos de Eletromagnetismo”, 3 ed., Porto Alegre, Bookman (2004).