3º Caso: Intervalo de Confiança para a proporção p.

p - proporção de elementos na população portadores de determinada característica

$\hat{p}$ - proporção amostral de elementos com a característica

$$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} =$$

$$= \frac{n^{\underline{o}} \text{ de elementos com a característica na amostra}}{n}$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o i-ésimo elemento na amostra possui a característica} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$i = 1, 2 \dots n$ amostra aleatória

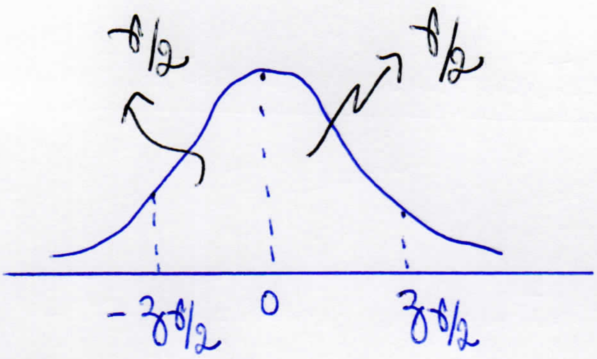
Pelo Teorema do Limite Central

$\hat{p} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ distribuição aproximad/ normal

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{\sim}{\sim} N(0,1)$$

Fixado γ - coeficiente de confiança do intervalo, obtemos $z_{\gamma/2}$ tal que

$$P\left(-z_{\gamma/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = Z \leq z_{\gamma/2}\right) = \gamma \qquad Z \sim N(0,1)$$



Isolando p:

$$P\left(\hat{p} - z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = \gamma$$

Como p é desconhecido:

a) Substitui-se p por $\hat{p}$ e o intervalo de confiança fica

$$\left[\hat{p} - z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

b) Como $p \in]0,1[$ e nesse intervalo $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, substituimos $p(1-p)$ pelo seu máximo valor, obtendo o intervalo de confiança com amplitude máxima

$$\left[\hat{p} - z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\ ,\ \hat{p} + z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right]$$

Intervalo a): $\hat{p} \pm z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ é denominado otimista porque admite $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$ é bem estimada por $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$.

Intervalo b): $\hat{p} \pm z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}$ é denominado conservador porque substitui $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$ por seu máximo valor.

Com essa construção é assegurado um coeficiente de confiança de no mínimo γ.

Exemplo 7.21 Magalhães e Lima

Deseja-se estimar p: proporção de cura de um certo medicamento em doentes contaminados com um tipo de esquistossomose.

Experimento: aplicou-se o medicamento em uma amostra de $n = 200$ pacientes e 160 foram curados.

Estimar p por intervalo

$\hat{p} = \frac{160}{200} = 0{,}8$ estimativa pontual de p

$\gamma = 0{,}95 \qquad z_{\gamma/2} = 1{,}96$

$$IC(p, 0{,}95) = \left[0{,}8 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{200}} \; ; \; 0{,}8 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{200}}\right]$$

$$= [0{,}745 \; ; \; 0{,}855]$$

$\downarrow$

otimista

$$IC(p, 0{,}95) = \left[0{,}8 - 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4 \cdot 200}} \; ; \; 0{,}8 + 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4 \cdot 200}}\right]$$

$$= [0{,}731 \; ; \; 0{,}869]$$

Conservador

Amplitude do IC otimista: 0,110

Conservador: 0,138

Exercício 25 Cap. 7, pag 255 Magalhães e Lima

Estimar p - proporção de eleitores favoráveis a um candidato

Com base em uma amostra piloto de tamanho $n = 100$ obteve-se $\hat{p} = 0{,}6$.

a) Utilizando a informação da amostra piloto determine o tamanho da amostra para que com probabilidade 0,8, o erro cometido seja no máximo 0,05.

b) Se na amostra final, com tamanho obtido em a), observou-se 51% de eleitores favoráveis ao candidato, construir um IC com 95% de confiança.

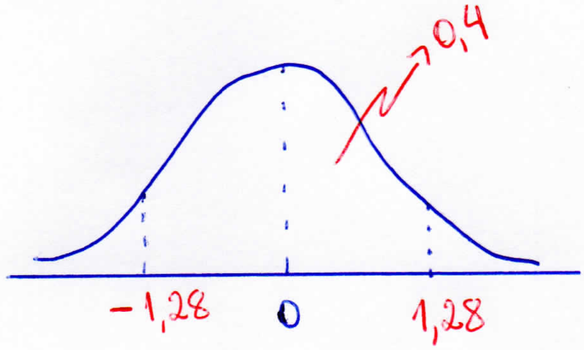
a) $n = \left(\frac{z_\gamma}{\varepsilon}\right)^2 \cdot p(1-p)$

Utilizando a informação da amostra piloto

$n = \left(\frac{z_\gamma}{\varepsilon}\right)^2 0{,}6 \cdot 0{,}4$

$\varepsilon = 0{,}05 \qquad \gamma = 0{,}8$

$P(-z_{\gamma/2} \leq Z \leq z_{\gamma/2}) = 0{,}8$



$n = \left(\frac{1{,}28}{0{,}05}\right)^2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 157{,}28 \qquad n = 158$

b) IC conservador $\quad \hat{p} \pm z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}$

$\gamma = 0{,}95 \Rightarrow z_{\gamma/2} = 1{,}96 \qquad 0{,}51 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4 \times 158}}$

$0{,}51 \pm \underbrace{1{,}96 \cdot 0{,}03965}_{0{,}077} \qquad [0{,}433 ; 0{,}587]$

IC otimista $\quad \hat{p} \pm z_{\gamma/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$$0{,}51 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}51 \cdot 0{,}49}{158}}$$

$[0{,}432 ; 0{,}588]$ → próximo do IC conservador porque $\hat{p} \simeq 0{,}5$

Eleições 2020

Ibope mostra empate técnico entre Russomanno, 25%, e Covas, 22%, em S.P.

Do Uol, em São Paulo

Atualizada em 15/10/2020 20h19

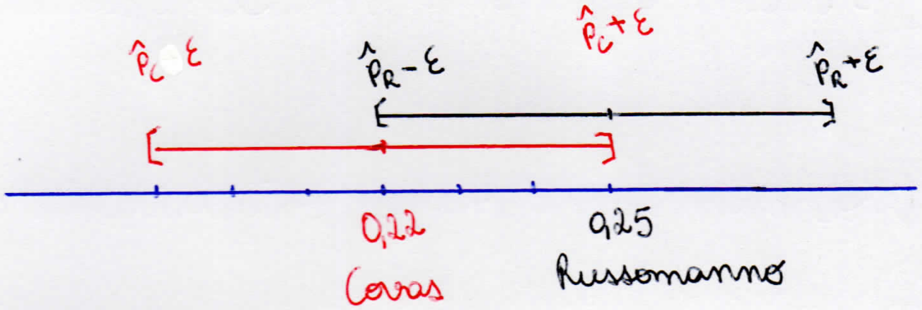
Os candidatos Celso Russomanno (Republicanos) e Bruno Covas (PSDB) estão tecnicamente empatados na liderança da pesquisa Ibope para a Prefeitura de São Paulo.

O deputado federal está com 25%, enquanto o atual prefeito da cidade tem 22% das intenções de voto. Como a margem de erro é de três pontos percentuais para mais ou para menos, os dois estão tecnicamente empatados.

A pesquisa ouviu 1.001 eleitores entre 13 e 15 de outubro. O nível de confiança utilizado é de 95%.

...

Foi registrada no TSE sob o número SP-01432/2020 e a pesquisa foi encomendada pela TV Globo e pelo jornal O Estado de São Paulo.



PQ $\varepsilon = 0{,}03$?

$n = 1001$ coef. de conf $\gamma = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}96$

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \qquad 1001 = \left(\frac{1{,}96}{\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \qquad \varepsilon^2 = \frac{1{,}96^2}{4 \cdot 1001}$$

$$\varepsilon^2 = 0{,}0009594 \Rightarrow \varepsilon = 0{,}03097$$

Para a Próxima Aula

Ler pag 259 a 263 Magalhães e Lima
(Capítulo 8 - Teste de Hipóteses)