Teorema de Fourier

1) Sabemos que se $\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] = f(x)$, $x \in I$,

então f é periódica com período $2L$.

2) Agora suponha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+2L) = f(x)$ e

$\int_{-L}^{L} |f(x)|dx$ é finita, então os termos a_m e b_m tem

sentido $\forall m$. ie; $a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$ $m = 0, 1, 2, \ldots$

e $b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$; $m = 1, 2, 3, \ldots$.

estão bem definidos, portanto podemos tomar a serie de Fourier associada à f, ie: construimos a serie:

$$(*) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$

3) perguntas: (1) a serie $(*)$ converge $\forall x$?

(2) se ela é convergente $\Rightarrow (*) \equiv f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ja vimos que (2) pode não acontecer. Além disso, é possivel que a serie seja divergente.

- Para solucionar (2) precisamos impor condições sobre a função f.

<u>Definição</u>: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita <u>seccionalmente contínua</u> em $[a,b]$ (ou contínua por partes) se o intervalo $[a,b]$ pode ser dividido em um número finito de pontos:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ tal que:

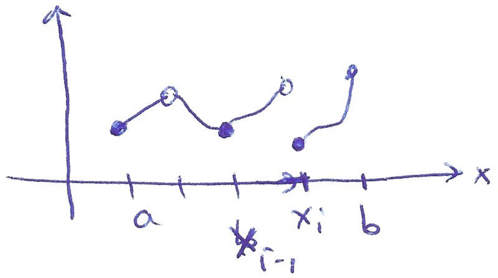
1) f é contínua em cada subintervalo (x_{i-1}, x_i).

2) f tem um limite finito nos extremidades do subintervalo, ou seja para $x \in (x_{i-1}, x_i)$ os limites

$$\lim_{x \to x_{i-1}^+} f(x) \equiv f(x_{i-1}^+) \quad , e,$$

$$\lim_{x \to x_i^-} f(x) \equiv f(x_i^-) \quad \text{existem}$$

Exemplo:



Observe: não é essencial que f seja definida nos pontos da partição x_i.

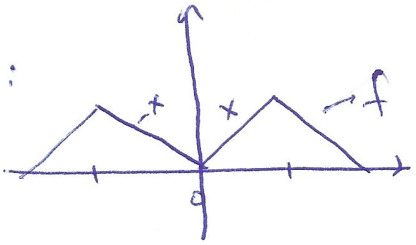
$[a, b]$ pode ser do tipo: (a, b), ou $[a, b)$ ou $(a, b]$.

Teorema (da convergência pontual). Sejam f e f' seccionalmente-contínuas em $[-L, L)$, e definimos f fora do $[-L, L)$ tal que seja periódica de período $2L$. Então:

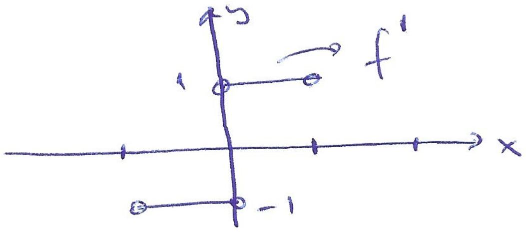
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \left(\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)\right] \text{ é convergente e,}$$

ela converge para $\begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ é ponto de continuidade da } f. \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } x \text{ é um ponto de descontinuidade de } f. \end{cases}$

Exemplo:



f é contínua

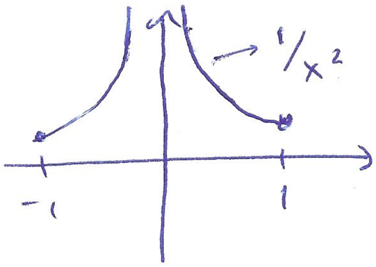


f' é seccionalmente contínua.

Observe que $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1, \\ \lim\limits_{x \to 0^-} -1 = -1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ não existe.

2) funções que não satisfazem as hipóteses do teorema da convergência pontual: a) Aquelas que têm descontinuidades finitas em $[-L, L)$. Por exemplo $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \in [-1, 1]$.



b) funções com infinitos saltos no intervalo $(-L, L)$.

Observe: 1) Cada termo da série de Fourier é contínua, e ainda a série pode fazer convergência a uma função não-contínua.

2) Cada termo da série de Fourier é derivável infinitas vezes, mas a série pode fazer convergência a uma função que não seja derivável.

Exemplo: 1) Retomamos o exemplo anteriormente trabalhado:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2, \end{cases} \quad \text{com } f(x+4) = f(x).$$

tinhamos construído a serie de fourier associada à f:

$$1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}.$$

a) $$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

↑ f contínua $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Logo se $x = 0$, $f(0) = 0 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2) Retomamos o exemplo $f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$ com $f(x+2L) = f(x)$, $\forall x$. Então usando o teorema de convergência pontual segue-se que:

$$\frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)}{(2n-1)} = \begin{cases} \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{L}{2}, & x = 0. \\ \frac{L}{2}, & \text{se } x = \pm L \\ 0, & \text{se } x \in (-L, 0) \\ L, & \text{se } x \in (0, L). \end{cases}$$

Para todo $x \in (-L, 0)$: temos que: $\frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)}{(2n-1)} = -L/2$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)}{(2n-1)} = -\pi/4.$$

Se $x \in (0, L) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)}{(2n-1)} = \frac{L}{2} \cdot \frac{\pi}{2L} = \pi/4.$