Mecânica (IGc) - 4310192

Ministrado por

Prof. Gustavo Paganini Canal

Departamento de Física Aplicada

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

O momento linear total se conserva durante uma colisão violenta entre dois carros. A energia cinética, nem sempre

Curso ministrado online para o

Instituto de Geociências

e-mail: canal@if.usp.br

São Paulo - SP, 05 de Novembro de 2020

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- **Conservação do momento linear e colisões**
- **Colisões elásticas**
- **Centro de massa**
- **Propulsão de um foguete**
- **Exercícios de Fixação**

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

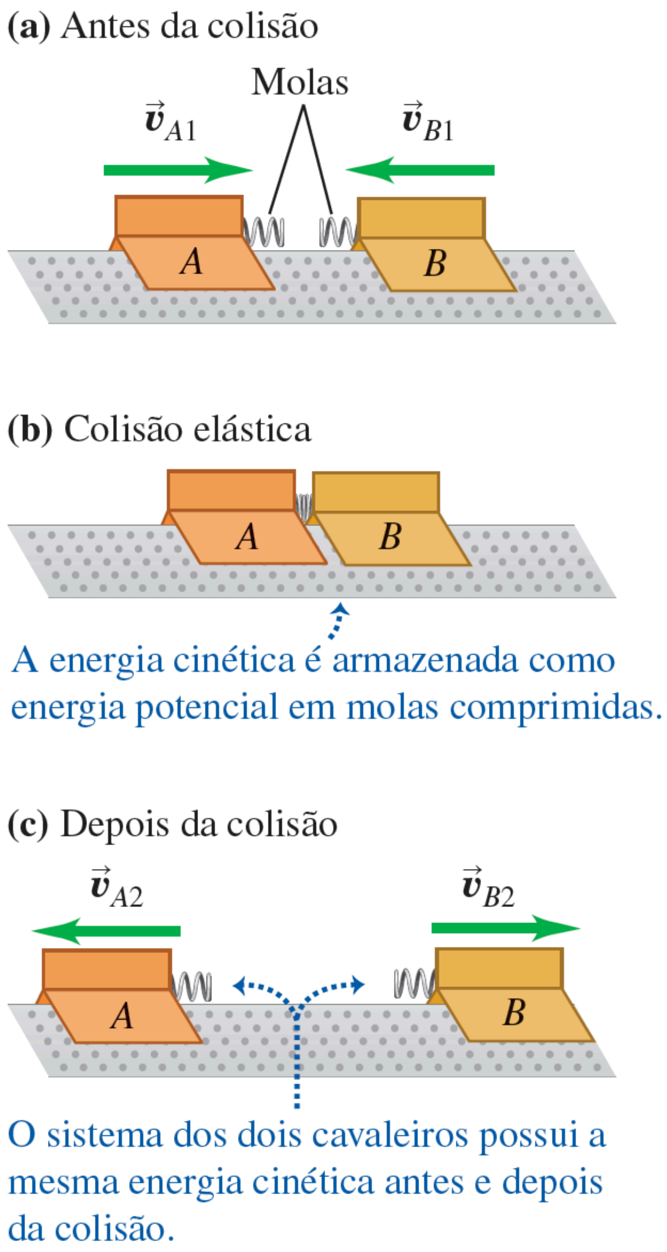
- **Conservação do momento linear e colisões**
- Colisões elásticas
- Centro de massa
- Propulsão de um foguete
- Exercícios de Fixação

A conservação do momento linear durante colisões

- **Durante uma colisão, quando as forças entre os corpos forem muito maiores que as forças externas podemos desprezar completamente as forças externas e considerar os corpos como um sistema isolado**
  - *Nesse caso, existe conservação do momento linear na colisão, e o momento linear total do sistema é o mesmo antes e depois da colisão*
  - *Exemplo: dois carros colidindo em um cruzamento com gelo na pista*
  - *Mesmo o caso de uma colisão em uma pista seca pode ser tratado como um sistema isolado quando, durante a colisão, as forças entre os corpos forem muito maiores que as forças de atrito entre os pneus e o chão*

Classificação de colisões

- **Colisões elásticas**
  - *Quando a energia cinética total do sistema se conserva, isto é, quando as forças entre os corpos são conservativas*



Classificação de colisões

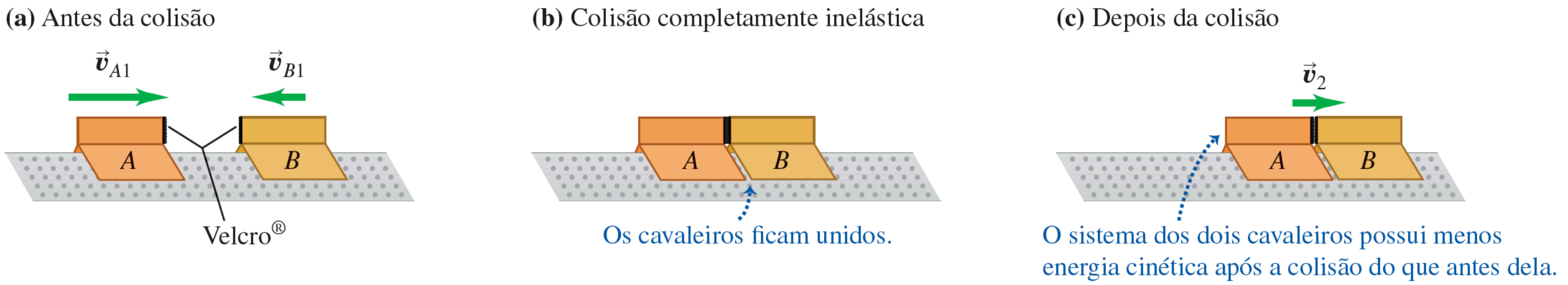
- **Colisões elásticas**
  - *Quando a energia cinética total do sistema se conserva, isto é, quando as forças entre os corpos são conservativas*
- **Colisões inelásticas**
  - *Quando a energia cinética total do sistema depois da colisão é menor do que antes*

Classificação de colisões

- **Colisões elásticas**
  - *Quando a energia cinética total do sistema se conserva, isto é, quando as forças entre os corpos são conservativas*

- **Colisões inelásticas**
  - *Quando a energia cinética total do sistema depois da colisão é menor do que antes*

- **Colisões completamente inelásticas**
  - *Quando os corpos em colisão aderem-se e movem-se como um só corpo após a colisão*



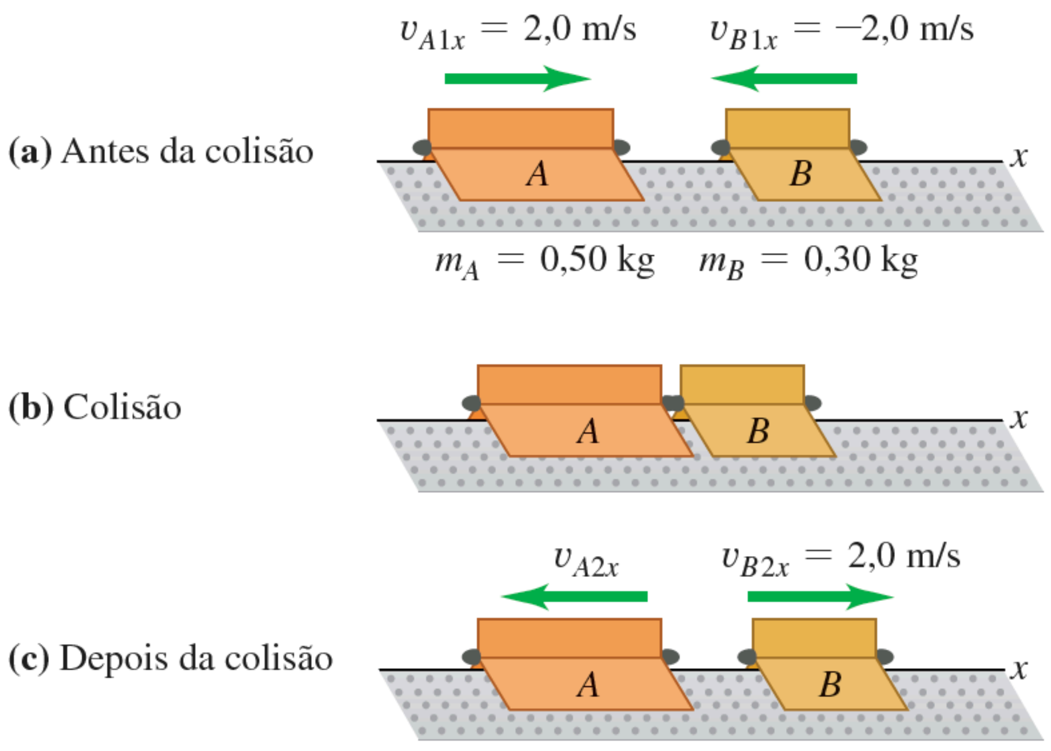
Exemplo: colisão ao longo de uma linha reta (feito na aula anterior)

- **Dois cavaleiros com massas diferentes se deslocam em sentidos contrários em um trilho de ar linear sem atrito. Depois da colisão, o cavaleiro B se afasta com velocidade final de 2,0 m/s. Qual é a velocidade final do cavaleiro A?**

$$p_{x,1} = m_A\, v_{Ax,1} + m_B\, v_{Bx,1} = 0{,}40\, kg \cdot m/s$$

$$p_{x,2} = m_A\, v_{Ax,2} + m_B\, v_{Bx,2} = p_{x,1}$$

$$v_{Ax,2} = \frac{p_{x,1} - m_B\, v_{Bx,2}}{m_A} = -\,0{,}40\, m/s$$



Exemplo: colisão ao longo de uma linha reta (continuação)

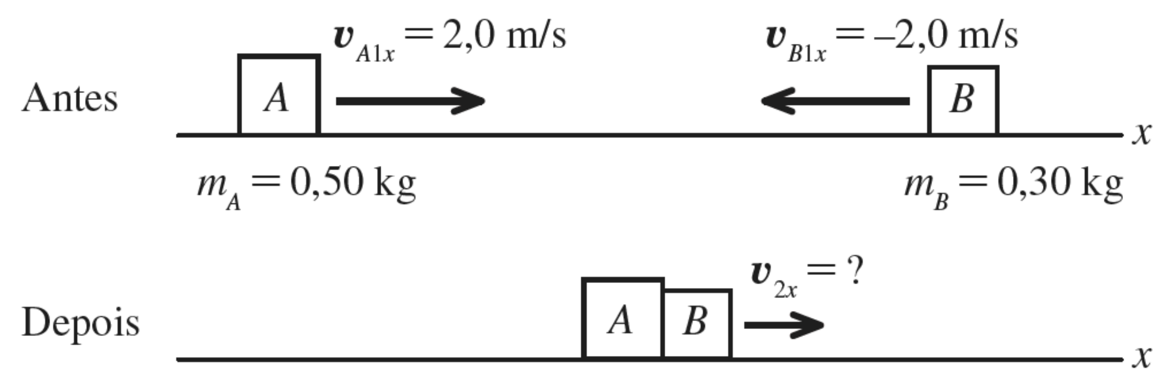
- **Suponha que, na colisão descrita no exemplo anterior, os dois cavaleiros não sejam rebatidos, mas permaneçam colados após a colisão. Calcule a velocidade final e compare a energia cinética inicial com a final**

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = (m_A + m_B) v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x}}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{(0{,}50\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s}) + (0{,}30\ \text{kg})(-2{,}0\ \text{m/s})}{0{,}50\ \text{kg} + 0{,}30\ \text{kg}}$$

$$= 0{,}50\ \text{m/s}$$



Como v_{2x} é positivo, os cavaleiros movem-se para a direita após a colisão. Antes da colisão, as energias cinéticas são:

$$K_A = \tfrac{1}{2} m_A v_{A1x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}50\ \text{kg})\ (2{,}0\ \text{m/s})^2 = 1{,}0\ \text{J}$$

$$K_B = \tfrac{1}{2} m_B v_{B1x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}30\ \text{kg})\ (-2{,}0\ \text{m/s})^2 = 0{,}60\ \text{J}$$

A energia cinética total antes da colisão é $K_1 = K_A + K_B = 1{,}6$ J. A energia cinética após a colisão é

$$K_2 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B) v_{2x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}50\ \text{kg} + 0{,}30\ \text{kg})\ (0{,}50\ \text{m/s})^2$$

$$= 0{,}10\ \text{J}$$

Energia cinética sempre é perdida em uma colisão completamente inelástica

Exemplo: pêndulo balístico

- **A figura abaixo mostra um pêndulo balístico, um sistema simples para medir a velocidade de uma bala. A bala, com massa m_B, é disparada contra um bloco de madeira com massa m_M, suspenso como um pêndulo, com o qual produz uma colisão completamente inelástica. Depois do impacto com a bala, o bloco oscila atingindo uma altura máxima y. Conhecendo-se os valores de y, m_B e m_M, qual é a velocidade inicial v_1 da bala?**

$$m_B v_1 = (m_B + m_M) v_2$$

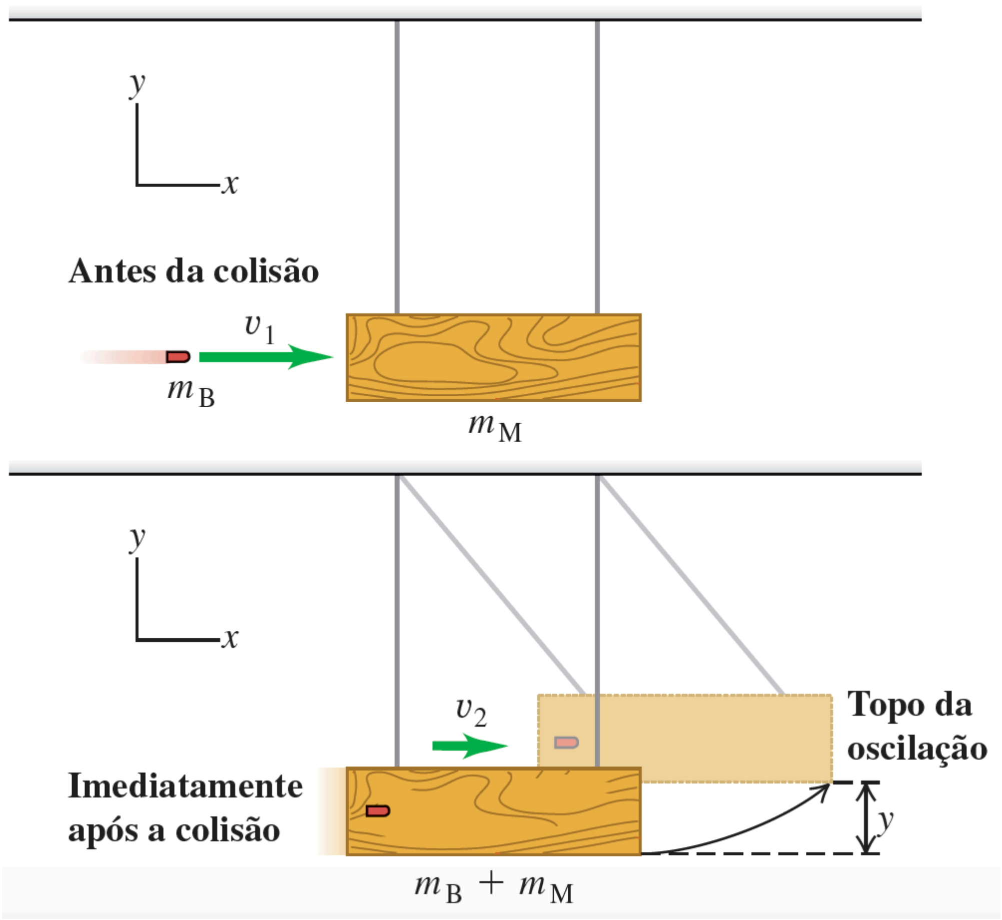
$$v_1 = \frac{m_B + m_M}{m_B} v_2$$

$$\tfrac{1}{2}(m_B + m_M) v_2^2 = (m_B + m_M) g y$$

$$v_2 = \sqrt{2gy}$$

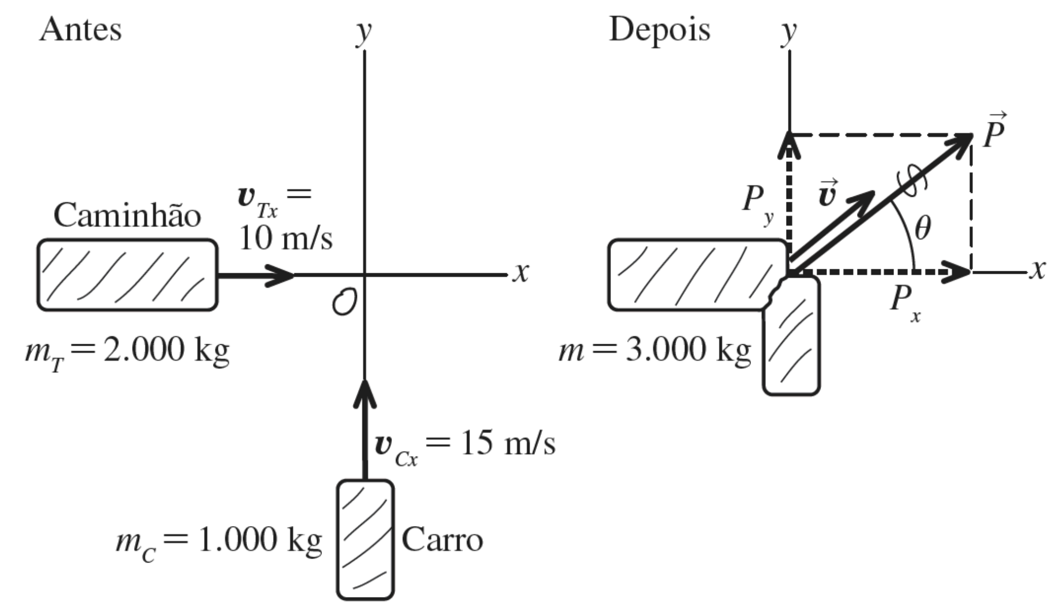
Substituindo v_2 por essa expressão na equação do momento linear, obtemos o valor da incógnita v_1:

$$v_1 = \frac{m_B + m_M}{m_B} \sqrt{2gy}$$



Exemplo: colisão de um automóvel

- **Um carro de massa de 1.000 kg com velocidade de 15 m/s colide com um caminhão de 2.000 kg com velocidade de 10 m/s (ver figura abaixo). Os veículos passaram a se deslocar juntos após a colisão, como um único corpo. Qual é a velocidade dos carros unidos após a colisão?**



$$P_x = p_{Cx} + p_{Tx} = m_C v_{Cx} + m_T v_{Tx}$$
$$= (1000\ \text{kg})(0) + (2000\ \text{kg})(10\ \text{m/s})$$
$$= 2{,}0 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$P_y = p_{Cy} + p_{Ty} = m_C v_{Cy} + m_T v_{Ty}$$
$$= (1000\ \text{kg})(15\ \text{m/s}) + (2000\ \text{kg})(0)$$
$$= 1{,}5 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

O módulo de $\vec{\boldsymbol{P}}$ é

$$P = \sqrt{(2{,}0 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s})^2 + (1{,}5 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s})^2}$$
$$= 2{,}5 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$V = \frac{P}{M} = \frac{2{,}5 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{3000\ \text{kg}} = 8{,}3\ \text{m/s}$$

$$\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{1{,}5 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{2{,}0 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}} = 0{,}75 \qquad \theta = 37°$$

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Conservação do momento linear e colisões
- Colisões elásticas
- Centro de massa
- Propulsão de um foguete
- Exercícios de Fixação

A conservação do momento linear durante colisões elásticas

- **Uma colisão elástica em um sistema isolado é aquela na qual existe conservação da energia cinética (e do momento linear)**
  - *As forças atuando entre os corpos que colide são conservativas*

- **Quando duas bolas de bilhar colidem, elas se deformam um pouco nas adjacências da superfície de contato, mas recuperam a forma inicial**
  - *Uma parte da energia cinética é momentaneamente armazenada sob a forma de energia potencial elástica, mas, logo a seguir, a energia elástica é reconvertida em energia cinética*

Colisões elásticas unidimensionais

- **Colisão elástica unidimensional entre dois corpos A e B, na qual todas as velocidades estão sobre a mesma linha reta (digamos, sobre o eixo x)**
  - *Conservação da energia cinética*

$$\frac{1}{2}m_A {v_{A1x}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_{B1x}}^2 = \frac{1}{2}m_A {v_{A2x}}^2 + \frac{1}{2}m_B {v_{B2x}}^2$$

  - *Conservação do momento linear*

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

- **Quando as massas e as velocidades iniciais são conhecidas, as equações acima podem ser usadas para calcular as velocidades finais**

Colisões elásticas com um corpo inicialmente em repouso (1)

- **Caso particular em que o corpo B está em repouso antes da colisão**
  - *Conservação da energia cinética*

$$\frac{1}{2}m_A{v_{A1x}}^2 = \frac{1}{2}m_A{v_{A2x}}^2 + \frac{1}{2}m_B{v_{B2x}}^2$$

  - *Conservação do momento linear*

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

- **Estas equações podem ser re-escritas como**

$$m_B{v_{B2x}}^2 = m_A\left({v_{A1x}}^2 - {v_{A2x}}^2\right) = m_A\left(v_{A1x} - v_{A2x}\right)\left(v_{A1x} + v_{A2x}\right)$$

$$m_B v_{B2x} = m_A\left(v_{A1x} - v_{A2x}\right)$$

- **Dividindo um equações pela outra, temos que**

$$v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x}$$

Colisões elásticas com um corpo inicialmente em repouso (2)

- **Substituindo a expressão** $v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x}$ **em** $m_B v_{B2x} = m_A\,(v_{A1x} - v_{A2x})$ **temos**

$$m_B(v_{A1x} + v_{A2x}) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})$$

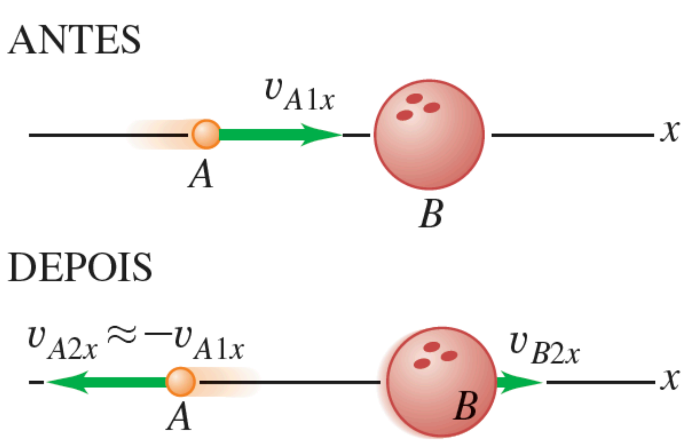
$$v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

- **Substituindo a expressão em** $v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x}$ **temos**

$$v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

- **Diferentes limites dessa expressão:**
  - $m_A << m_B$: $v_{B2} << v_{A1}$

(a) A bola de pingue-pongue em movimento atinge a bola de boliche inicialmente em repouso



Colisões elásticas com um corpo inicialmente em repouso (3)

- **Substituindo a expressão** $v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x}$ **em** $m_B v_{B2x} = m_A\,(v_{A1x} - v_{A2x})$ **temos**

$$m_B(v_{A1x} + v_{A2x}) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})$$

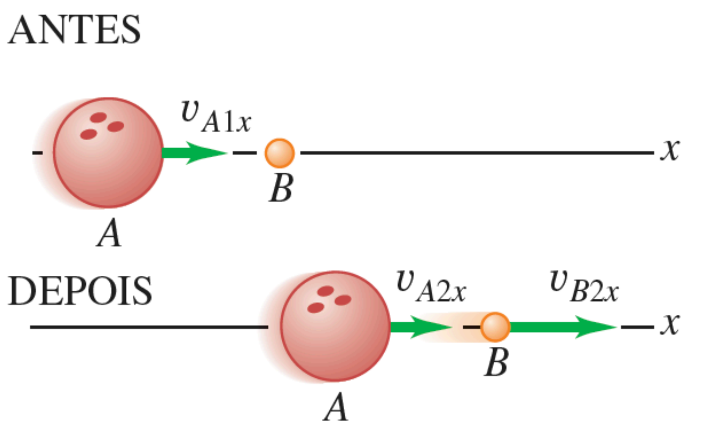
$$v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

- **Substituindo a expressão em** $v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x}$ **temos**

$$v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1x}$$

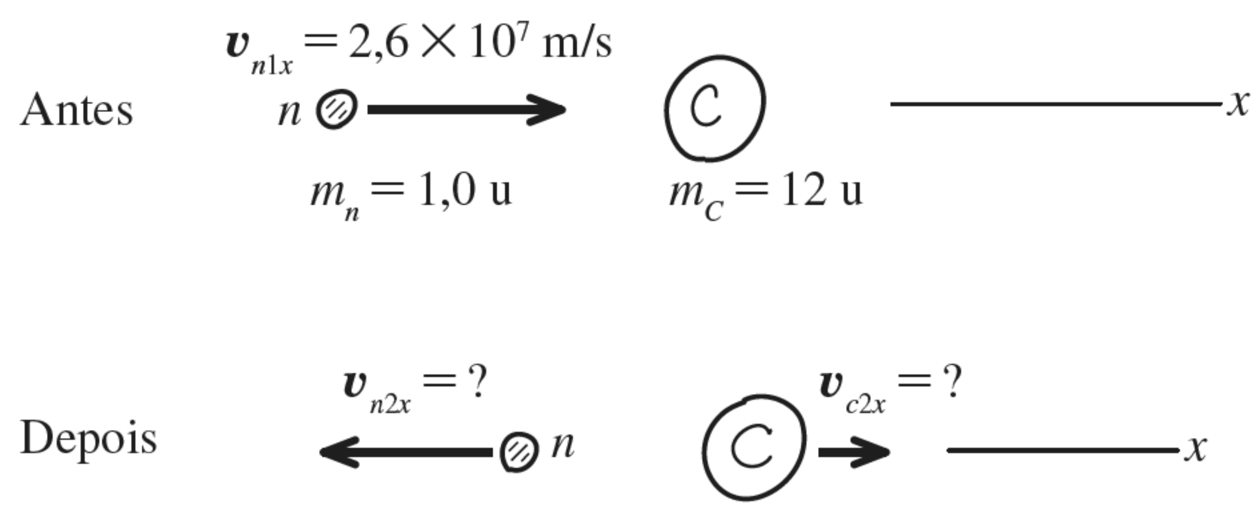
- **Diferentes limites dessa expressão:**
  - $m_A << m_B$: $v_{B2} << v_{A1}$
  - $m_A >> m_B$: $v_{B2} \sim 2\, v_{A1}$

(b) A bola de boliche em movimento atinge a bola de pingue-pongue inicialmente em repouso



Exemplo: colisão de um automóvel

- Nêutrons com velocidades elevadas são produzidos em um reator nuclear durante os processos de fissão de núcleos de urânio. Para impedir que os nêutrons desencadeiem novos processos de fissão, eles devem ser freados por colisões com núcleos no moderador do reator. O primeiro reator nuclear usava grafite como moderador da reação. Suponha que um nêutron (massa igual a 1,0 u), deslocando-se a 2,6x10^7 m/s, sofre uma colisão elástica frontal com um núcleo de carbono (massa igual a 12 u), que estava inicialmente em repouso. As forças externas que atuam durante a colisão são desprezáveis. Quais são as velocidades após a colisão? (1 u é uma unidade de massa atômica equivalente a 1,67x10^{-27} kg)

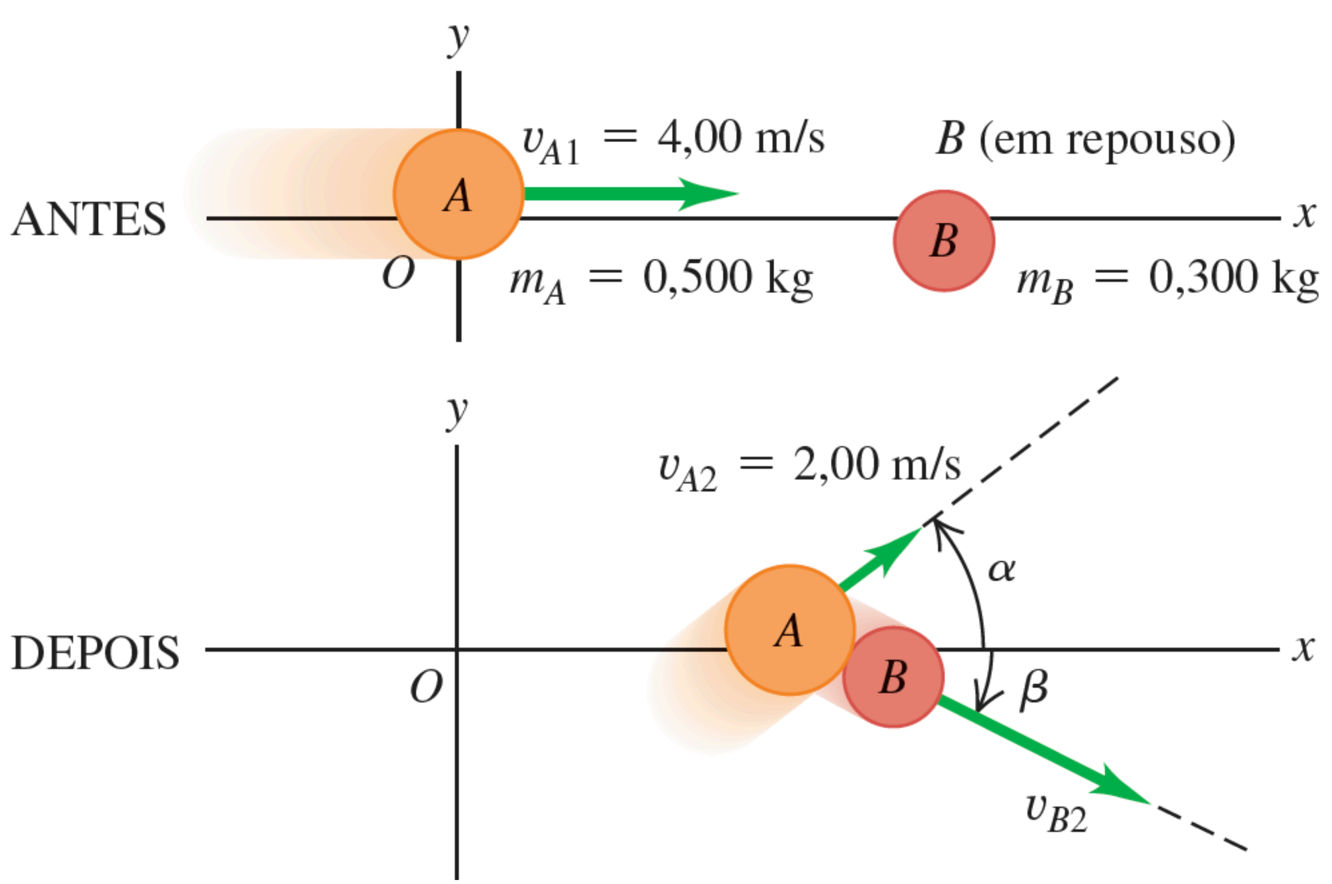


$$v_{n2x} = -2{,}2 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$v_{C2x} = 0{,}4 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Exercício para casa: colisão elástica em duas dimensões

- **A situação descrita na figura abaixo é uma colisão elástica entre dois discos de hóquei (com massas m_A = 0,500 kg e m_B = 0,300 kg) sobre uma mesa de ar sem atrito. O disco A possui velocidade inicial de 4,0 m/s no sentido positivo do eixo Ox e uma velocidade final de 2,0 m/s cuja direção α é desconhecida. O disco B está inicialmente em repouso. Calcule a velocidade final v_{B2} do disco B e os ângulos α e β indicados na figura.**



Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Conservação do momento linear e colisões
- Colisões elásticas
- Centro de massa
- Propulsão de um foguete
- Exercícios de Fixação

A definição da posição do centro de massa de um sistema

- **Podemos reformular a lei da conservação do momento linear de um modo útil em termos do conceito de *CENTRO DE MASSA***

- **Considere um sistema formado por partículas cujas massas são m_1, m_2 e assim por diante. Suponha que suas coordenadas sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2), e assim por diante, respectivamente**

- **A posição do centro de massa do sistema, (x_{cm}, y_{cm}), é definido por uma média ponderada pelas massas das partículas:**

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

A definição da posição do centro de massa de um sistema

- **Podemos reformular a lei da conservação do momento linear de um modo útil em termos do conceito de *CENTRO DE MASSA***

- **Considere um sistema formado por partículas cujas massas são m_1, m_2 e assim por diante. Suponha que suas coordenadas sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2), e assim por diante, respectivamente**

- **A posição do centro de massa do sistema, (x_{cm}, y_{cm}), é definido por uma média ponderada pelas massas das partículas:**

Vetores de posição das partículas individuais

Vetor de posição do **centro de massa** de um sistema de partículas

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Massas individuais das partículas

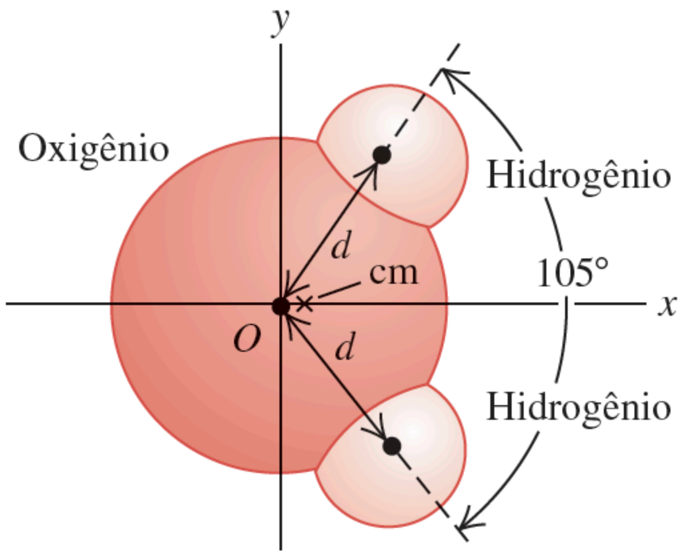
Em notação vetorial

Exemplo: centro de massa da molécula da água

- **A figura abaixo mostra a estrutura simplificada de uma molécula de água. A distância entre os átomos é dada por d=9,57x10^{-11} m. Cada átomo de hidrogênio possui massa igual a 1,0 u, e o átomo de oxigênio possui massa igual a 16,0 u. Calcule a posição do centro de massa da molécula da água**

$$x_{cm} = \frac{\left[\begin{array}{c}(1{,}0\ \text{u})(d\cos 52{,}5°) + (1{,}0\ \text{u})(d\cos 52{,}5°) \\ + (16{,}0\ \text{u})(0)\end{array}\right]}{1{,}0\ \text{u} + 1{,}0\ \text{u} + 16{,}0\ \text{u}} = 0{,}068d$$

$$y_{cm} = \frac{\left[\begin{array}{c}(1{,}0\ \text{u})(d\ \text{sen}\ 52{,}5°) + (1{,}0\ \text{u})(-d\ \text{sen}\ 52{,}5°) \\ + (16{,}0\ \text{u})(0)\end{array}\right]}{1{,}0\ \text{u} + 1{,}0\ \text{u} + 16{,}0\ \text{u}} = 0$$



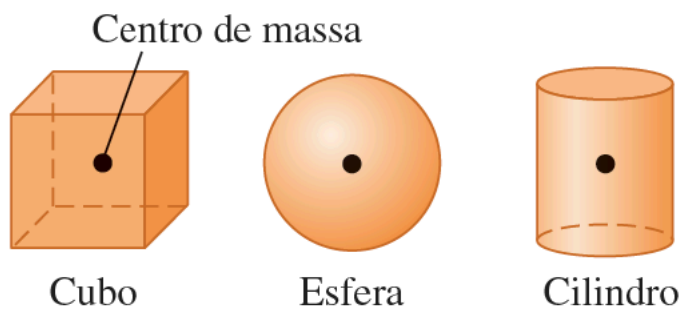
Substituindo o valor $d = 9{,}57 \times 10^{-11}$ m, encontramos

$$x_{cm} = (0{,}068)\,(9{,}57 \times 10^{-11}\ \text{m}) = 6{,}5 \times 10^{-12}\ \text{m}$$

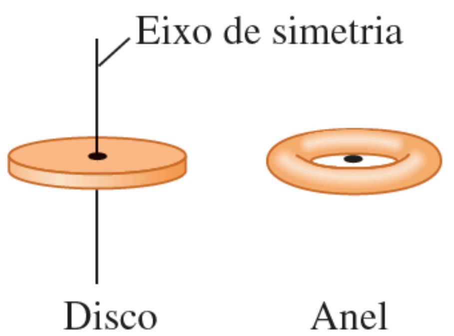
O centro de massa de corpos sólido

- **Para um corpo sólido, para o qual existe (pelo menos em nível macroscópico) uma distribuição contínua de massas, as somas indicadas nas equações devem ser substituídas por integrais**

- **O cálculo do centro de massa pode ser bastante complicado, porém é possível fazer algumas afirmações gerais:**
  - *O centro de massa de um corpo homogêneo, como uma bola de bilhar, um cubo de açúcar ou uma lata de suco de laranja, coincide com o centro geométrico*
  - *Quando um corpo possui um eixo de simetria, como uma roda ou uma polia, o centro de massa está sempre situado sobre esse eixo*
  - *O centro de massa de um corpo não precisa estar dentro do corpo*



Se um objeto homogêneo possui um centro geométrico, é aí que o centro de massa está localizado.



Se um objeto possui um eixo de simetria, o centro de massa se situa ao longo dele. Como no caso do anel, o centro de massa pode não estar no interior do objeto.

O movimento do centro de massa de um sistema

- **Podemos calcular a velocidade do centro de massa de um sistema tomando a derivada temporal da posição do centro de massa**

$$v_{\mathrm{cm}x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

$$v_{\mathrm{cm}y} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + m_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + m_3 \vec{\boldsymbol{v}}_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}}$$

O movimento do centro de massa de um sistema

- **Podemos calcular a velocidade do centro de massa de um sistema tomando a derivada temporal da posição do centro de massa**

$$v_{\mathrm{cm}x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

$$v_{\mathrm{cm}y} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1 \vec{\boldsymbol{v}}_1 + m_2 \vec{\boldsymbol{v}}_2 + m_3 \vec{\boldsymbol{v}}_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}}$$

- **Definindo a massa total do sistema por** $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ **temos que:**

Massa total de um sistema de partículas

Momentos lineares das partículas individuais

$$M\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{cm}} = m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + m_3\vec{\boldsymbol{v}}_3 + \cdots = \vec{\boldsymbol{P}}$$

Velocidade do centro de massa

Momento linear total do sistema

O momento linear total de um sistema de partículas é igual à massa total multiplicada pela velocidade do centro de massa

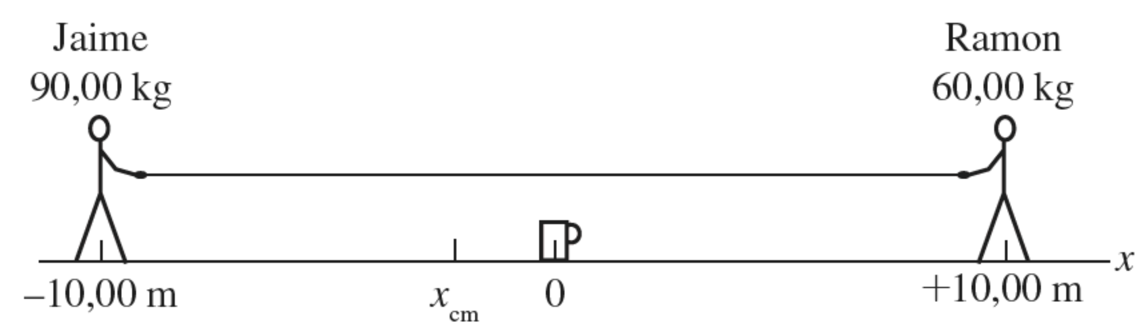
O movimento do centro de massa de um sistema

- **Para um sistema de partículas cuja força resultante externa é igual a zero, o momento linear total é constante e a velocidade do centro de massa também**
  - *Chave de rosca deslizando sobre uma superfície horizontal sem atrito (vista de cima)*
  - *A força externa total que atua sobre ela é aproximadamente igual a zero*
  - *À medida que ela gira, o centro de massa se desloca ao longo de uma linha reta com uma velocidade aproximadamente const.*

Exemplo: cabo de guerra sobre o gelo

- **Jaime (90,0 kg) está a uma distância de 20,0 m de Ramon (60,0 kg), e ambos estão em pé sobre a superfície lisa de um lago congelado. Na metade da distância entre os dois, uma caneca contendo a bebida favorita deles está apoiada sobre o gelo. Eles puxam as extremidades de uma corda leve esticada entre eles. Quando Jaime se desloca 6,0 m no sentido da caneca, em que sentido Ramon se desloca e qual é a distância percorrida por ele?**

$$x_{cm} = \frac{(90{,}0\text{ kg})(-10{,}0\text{ m}) + (60{,}0\text{ kg})(10{,}0\text{ m})}{90{,}0\text{ kg} + 60{,}0\text{ kg}} = -2{,}0\text{ m}$$



Quando Jaime se desloca 6,0 m no sentido da caneca, sua nova coordenada x passa para –4,0 m; vamos chamar de x_2 a nova coordenada x de Ramon. O centro de massa não se move, logo

$$x_{cm} = \frac{(90{,}0\text{ kg})(-4{,}0\text{ m}) + (60{,}0\text{ kg})x_2}{90{,}0\text{ kg} + 60{,}0\text{ kg}} = -2{,}0\text{ m}$$

$$x_2 = 1{,}0\text{ m}$$

Jaime se deslocou 6,0 m e ainda está a uma distância de 4,0 m da caneca, enquanto Ramon se deslocou 9,0 m e está a uma distância de 1,0 m da caneca.

O movimento do centro de massa de um sistema

- **Podemos calcular a aceleração do centro de massa de um sistema tomando a derivada temporal da velocidade do centro de massa**

$$M\vec{a}_{\mathrm{cm}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \ldots$$

- **Note que $m_1 \vec{\mathbf{a}}_1$ é igual à soma vetorial das forças que atuam sobre a primeira partícula e assim por diante. Portanto, o membro direito dessa equação é igual à soma vetorial $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$ de todas as forças que atuam sobre todas as partículas. Classificando cada força como externa ou interna, temos que**

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_{\mathrm{ext}} + \Sigma\vec{F}_{\mathrm{int}} = M\vec{a}_{\mathrm{cm}}$$

- **Pela terceira lei de Newton, todas as forças internas se cancelam aos pares, e $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{int}}$. O que sobra no membro esquerdo é a soma apenas das forças externas**

Força externa resultante sobre **um corpo ou um conjunto de partículas**

$$\Sigma\vec{F}_{\mathrm{ext}} = M\vec{a}_{\mathrm{cm}}$$

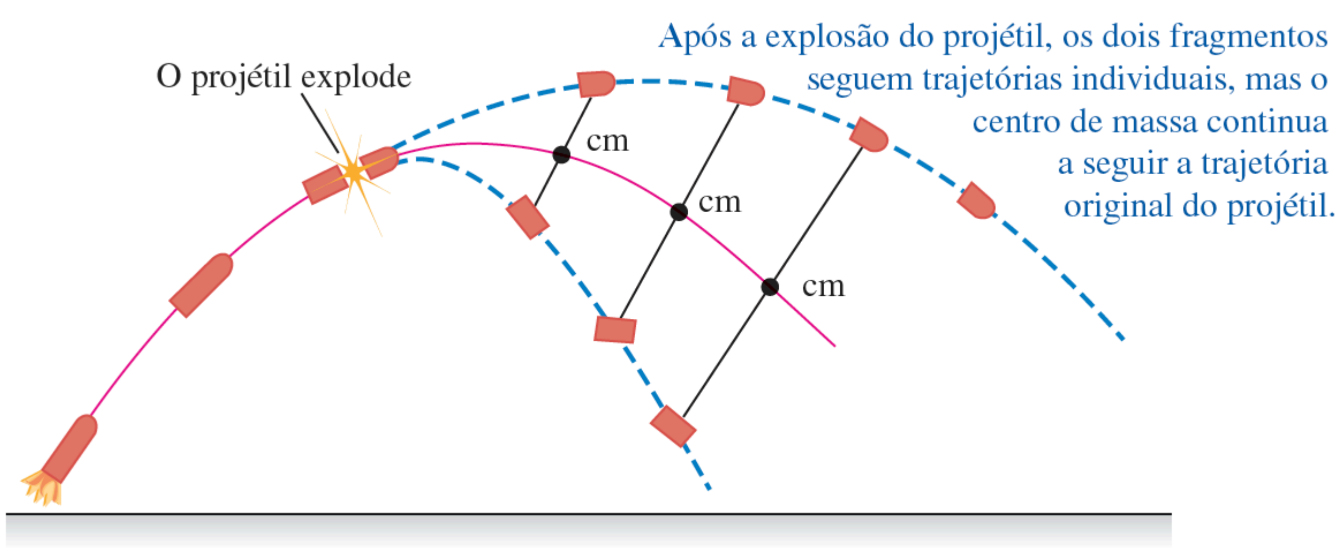
Massa total do corpo ou conjunto de partículas

Aceleração do centro de massa

Características do movimento do centro de massa de um sistema

- **Quando forças externas atuam sobre um corpo, ou um conjunto de partículas, seu centro de massa se move exatamente como se toda a massa estivesse concentrada nesse ponto e estivesse submetida a uma força igual à resultante de todas as forças que atuam sobre o sistema**

- **Suponha que um projétil disparado por um canhão esteja descrevendo uma trajetória parabólica (desprezando a resistência do ar) quando explode no ar, separando-se em dois fragmentos de massas iguais**

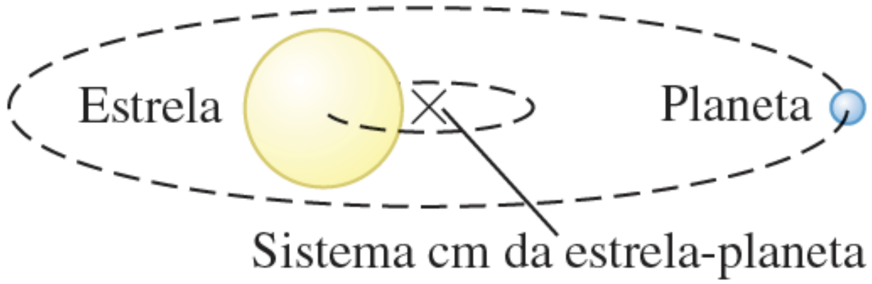


Os fragmentos seguem novas trajetórias parabólicas, porém o centro de massa continua a descrever sua trajetória parabólica original, exatamente como se toda a massa ainda estivesse concentrada nesse ponto

Características do movimento do centro de massa de um sistema

- **Quando forças externas atuam sobre um corpo, ou um conjunto de partículas, seu centro de massa se move exatamente como se toda a massa estivesse concentrada nesse ponto e estivesse submetida a uma força igual à resultante de todas as forças que atuam sobre o sistema**

- **Não é correto dizer que a Lua orbita em torno da Terra. Em vez disso, a Lua e a Terra descrevem uma órbita em torno de seu centro de massa comum**



Planetas em órbita de estrelas distantes são tão pequenos que não podem ser vistos. Porém, sabe-se que um planeta e sua estrela-pai descrevem uma órbita em torno de seu centro de massa (cm) comum. Se observarmos uma estrela "balançando" em torno de um ponto, podemos deduzir que existe um planeta acompanhante não visto, e até mesmo determinar a massa desse planeta. Centenas de planetas em estrelas distantes foram descobertos dessa maneira

A segunda lei de Newton para o centro de massa de um sistema

- **Podemos reescrever a equação $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{ext}} = \mathbf{M}\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{cm}}$ do seguinte modo:**

$$M\vec{a}_{\mathrm{cm}} = M\frac{d\vec{v}_{\mathrm{cm}}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{\mathrm{cm}})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

- **Passamos a massa para dentro do sinal de derivada porque M, a massa total do sistema, permanece constante. Dessa forma, temos que**

$$\Sigma\vec{F}_{\mathrm{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \text{(corpo estendido ou sistema de partículas)}$$

Esta equação descreve um sistema de partículas, como um corpo rígido

A interação entre as partículas de um sistema pode alterar os momentos individuais das partículas, porém, o momento linear total do sistema só pode ser alterado pela ação das forças externas ao sistema

Sumário: Mecânica (IGc) - 4310192

- Conservação do momento linear e colisões
- Colisões elásticas
- Centro de massa
- **Propulsão de um foguete**
- Exercícios de Fixação

A conservação do momento linear e a propulsão de um foguete

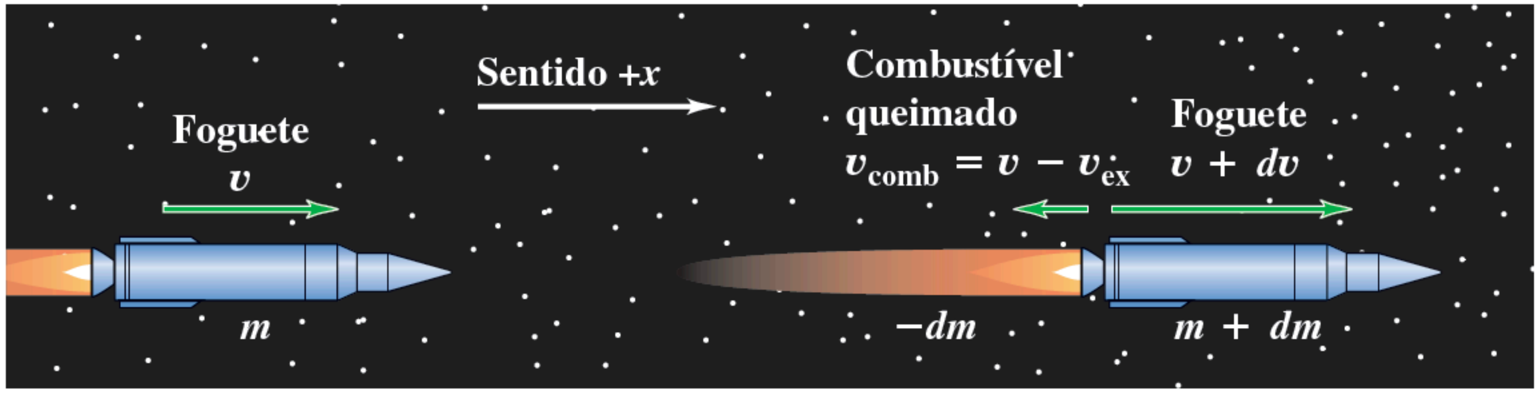
- **Quando a massa das partes de um sistema varia com o tempo, não podemos usar diretamente a segunda lei de Newton na forma $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$**
  - *A propulsão de um foguete é um exemplo típico e interessante para esse tipo de análise*

- **Um foguete é impulsionado para a frente pela ejeção traseira dos gases resultantes da queima do combustível que inicialmente está dentro dele (por isso o combustível do foguete também é chamado de propelente)**

- **A força orientada para a frente sobre o foguete é a reação da força para trás exercida sobre o material ejetado. A massa total do sistema é constante, porém a massa do foguete diminui à medida que o material é ejetado**

- **Considere um foguete disparado no espaço sideral, onde não existe nem resistência do ar nem força gravitacional. Seja m a massa do foguete, que sofre variação em função da queima do combustível**

(a) (b)



No tempo t, o foguete possui massa m e o componente x de velocidade v.

No tempo $t + dt$, o foguete possui massa $m + dm$ (sendo dm inerentemente *negativo*) e o componente x de velocidade $v + dv$. O combustível queimado possui componente x de velocidade $v_{comb} = v - v_{ex}$ e massa $-dm$. (O sinal negativo é necessário para tornar $-dm$ *positivo*, já que dm é negativo.)

  - *Em um curto intervalo dt, a massa do foguete varia de dm*
  - *Seja v_{ex} o módulo da velocidade de exaustão desse material em relação ao foguete, temos que da velocidade do combustível queimado será*

$$v_{comb} = v + (-v_{ex}) = v - v_{ex}$$

A conservação do momento linear e a propulsão de um foguete

- **O momento linear da massa ejetada será:** $(-dm)\, v_{\text{comb}} = (-dm)\, (v - v_{\text{ex}})$

- **O momento linear do foguete será:** $(m + dm)\, (v + dv)$

- **Logo, o momento linear total do sistema será:** $P_2 = (m + dm)\, (v + dv) + (-dm)\, (v - v_{\text{ex}})$

- **Pela conservação do momento linear temos que:** $m\, dv = -dm\, v_{\text{ex}} - dm\, dv$

- **O termo (dm dv) é o produto de duas grandezas infinitesimais e, portanto, é muito menor que os demais termos. Ignorando este termo,**

$$m \frac{dv}{dt} = -v_{\text{ex}} \frac{dm}{dt}$$

- **A força de propulsão é proporcional à velocidade relativa v_{ex} de exaustão do combustível queimado e à taxa de variação da massa desse combustível**

$$F = -v_{\text{ex}} \frac{dm}{dt}$$

A conservação do momento linear e a propulsão de um foguete

- **Quando a velocidade de exaustão permanece constante, podemos integrar a equação**

$$F = -v_{\mathrm{ex}} \frac{dm}{dt}$$

para achar a velocidade v em qualquer instante. Podemos re-escrever esta equação como

$$dv = -v_{\mathrm{ex}} \frac{dm}{m}$$

- **Integrando esta equação temos que** $\displaystyle\int_{v_0}^{v} dv' = -\int_{m_0}^{m} v_{\mathrm{ex}} \frac{dm'}{m'} = -v_{\mathrm{ex}} \int_{m_0}^{m} \frac{dm'}{m'}$

- **Portanto, a velocidade do foguete será** $\boxed{v - v_0 = -v_{\mathrm{ex}} \ln \frac{m}{m_0} = v_{\mathrm{ex}} \ln \frac{m_0}{m}}$

Exemplo: aceleração de um foguete (1)

- **Um foguete está no espaço sideral, longe de qualquer planeta, quando seu motor é acionado. Na primeira etapa da queima, o foguete ejeta 1/120 de sua massa inicial m_0 com uma velocidade relativa igual a 2.400 m/s. Qual é a aceleração inicial do foguete?**

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_0/120}{1\ \text{s}} = -\frac{m_0}{120\ \text{s}}$$

$$a = -\frac{v_{\text{ex}}}{m_0}\frac{dm}{dt} = -\frac{2.400\ \text{m/s}}{m_0}\left(-\frac{m_0}{120\ \text{s}}\right) = 20\ \text{m/s}^2$$

Exemplo: aceleração de um foguete (2)

- **Suponha que 3/4 da massa inicial m_0 do foguete do exemplo anterior seja de combustível, de modo que o combustível seja consumido com uma taxa constante em um intervalo total de 90 s. A massa final do foguete é $m = m_0/4$. Se o foguete parte do repouso em nosso sistema de coordenadas, qual é a sua velocidade nesse instante final?**

$$v = v_0 + v_{\text{ex}} \ln \frac{m_0}{m} = 0 + (2.400 \text{ m/s})(\ln 4) = 3.327 \text{ m/s}$$

Exercícios de fixação

- **Ler e fazer todos os exemplos das seções 8.3, 8.4, 8.5 e 8.6**
  - *Exercícios da seção 8.3: 8.33, 8.38, 8.40 e 8.44*
  - *Exercícios da seção 8.4: 8.46, 8.47, 8.49 e 8.50*
  - *Exercícios da seção 8.5: 8.52, 8.53 e 8.56*
  - *Exercícios da seção 8.6: 8.61, 8.62 e 8.63*