Exercícios 3.4

1. Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.

$a)\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ $b)\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

$c)\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$d)\ \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$ $e)\ \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

$f)\ \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$g)\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ $h)\ \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

$i)\ \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ em que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$j)\ \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$ em que $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 2 \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

$l)\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$ sendo g a função do item (j)

$m)\ \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$ em que g é a função do item (j)

2. A afirmação

   "$\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = \lim\limits_{x \to p^-} f(x) \Rightarrow f$ conínua em p" é falsa ou verdadeira? Justifique.

3. Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$, verifique que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua em 1? Por quê?

4. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$, que não seja contínua em 2, mas que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

5. Suponha que exista $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $p < x < p + r$. Prove que $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) \geqslant 0$ desde que o limite exista.

6. Sejam f uma função definida num intervalo aberto I e $p \in I$. Suponha que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in I$. Prove que $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} = 0$ desde que o limite exista.

(*Sugestão*: estude os sinais de $\lim\limits_{x \to p^+} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$ e de $\lim\limits_{x \to p^-} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}$

Exercícios 3.5

1. Calcule

$a)\ \lim_{x \to -1} \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$

$c)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$ $\qquad$ $d)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

2. Seja *f* definida $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Calcule

$a)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x^2)}{x}$

$c)\ \lim_{x \to 1} \dfrac{f(x^2-1)}{x-1}$ $\qquad$ $d)\ \lim_{x \to 0} \dfrac{f(7x)}{3x}$

3. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e seja p um real dado. Suponha que $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} = L$. Calcule

$a)\ \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$ $\qquad$ $b)\ \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+3h)-f(p)}{h}$

$c)\ \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+h)-f(p-h)}{h}$ $\qquad$ $d)\ \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p-h)-f(p)}{h}$

Exercícios 4.1

1. Calcule.

$a)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$

$b)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$

$c)\ \lim_{x \to -\infty} [5 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}]$

$d)\ \lim_{x \to +\infty} [2 - \frac{1}{x}]$

$e)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{x + 3}$

$f)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{x + 3}$

$g)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$

$h)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$

$i)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$

$j)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$

$l)\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{5 + \frac{2}{x}}$

$m)\ \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + 3}}$

$n)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$

$o)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

$p)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$

$q)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$

$r)\ \lim_{x \to +\infty} [x - \sqrt{x^2 + 1}]$

$s)\ \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 3}]$

2. Sejam f e g definidas em $[a, +\infty[$ e tais que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para *todo* $x \geq a$. Calcule, caso exista, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. *a*) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1}$

   b) Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$x > r \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1} < \frac{3}{4}$$

4. *a*) Calcule $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 3}{x^3 + 2x - 1}$

   b) Mostre que existe $r > 0$ tal que

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 3x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 + 2x + 1)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 2x + 3)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 6x + 1}{6x^3 + 2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 6x + 1}{6x^2 + x + 3}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 7x - 3}{x^4 - 2x + 3}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 2x + 3}{3x^4 + 7x - 1}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 - x}{3 + 2x}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2}$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + x}{3 + x^2}$

2. Prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$, no qual $n > 0$ é um natural.

3. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x + 3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x + 3}}{2x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [2x - \sqrt{x^2 + 3}]$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{3x^3 + 2})$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3})$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x + 3})$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - 1})$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt[3]{2 + 3x^3})$

4. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{5}{3-x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{4}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \dfrac{4}{2x-1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x+1}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^2-x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{x^2-x}$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \dfrac{3x+1}{4x^2-1}$

j) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

l) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

m) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$

n) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

o) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

p) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x-5}{x^2+3x-4}$

q) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

r) $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3x^2-4}{1-x^2}$

s) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$

5. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = L, L \neq 0,$ $\lim\limits_{x \to p^+} g(x) = 0,$ mas $\lim\limits_{x \to p^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

6. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] \neq 0.$

7. Dê exemplo de funções f e g tais que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1.$

8. Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que $a > 0$, b, c, d são reais dados. Prove que existem números reais x_1 e x_2 tais que $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$.

9. Sejam f e g duas funções definidas em $]a, +\infty[$ tais que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ e $g(x) > 0$ para todo $x > a$. Prove que existe $r > 0$ tal que para todo $x > r$, $f(x) > g(x)$.

4.3. SEQUÊNCIA E LIMITE DE SEQUÊNCIA

Exercícios 4.1

1. Calcule.

$a)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$

$b)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3}$

$c)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} [5 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}]$

$d)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} [2 - \dfrac{1}{x}]$

$e)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

$f)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

$g)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$

$h)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$

$i)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 3x + 1}$

$j)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$

$l)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{5 + \dfrac{2}{x}}$

$m)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2 + 3}}$

$n)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x + 2}$

$o)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

$p)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$

$q)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

$r)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} [x - \sqrt{x^2 + 1}]$

$s)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 3}]$

2. Sejam f e g definidas em $[a, +\infty[$ e tais que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para *todo* $x \geq a$. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. $a)$ Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1}$

$b)$ Mostre que existe $r > 0$ tal que

$$x > r \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{x^3 + 3x - 1}{2x^3 - 6x + 1} < \frac{3}{4}$$

4. $a)$ Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 3}{x^3 + 2x - 1}$

$b)$ Mostre que existe $r > 0$ tal que