Gabarito - Lista IV

①

a) A soma das ondas de mesma amplitude pode ser reescrita como

$$y(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t), \tag{1}$$

onde

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \omega_1 - \omega_2,\\ \bar{\omega} &= \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2).\end{aligned} \tag{2}$$

A velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{2\pi(\nu_1 - \nu_2)}{\frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2}} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\frac{\nu_1 - \nu_2}{v_{\text{som}}}} = v_{\text{som}}. \tag{3}$$

Onde utilizei as relações

$$\begin{aligned}v &= \lambda\nu,\\ \omega &= 2\pi\nu.\end{aligned} \tag{4}$$

A velocidade de fase é então dada por

$$v_{\text{fase}} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = \frac{2\pi(\nu_1 + \nu_2)}{2\pi(\frac{\nu_1+\nu_2}{v_{\text{som}}})} = v_{\text{som}}. \tag{5}$$

Portanto não há dispersão.

b) A velocidade de fase

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{\omega}{k}. \tag{6}$$

Portanto

$$\omega = \sqrt{kg}. \tag{7}$$

A velocidade de grupo pode ser então calculada

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}v_\phi. \tag{8}$$

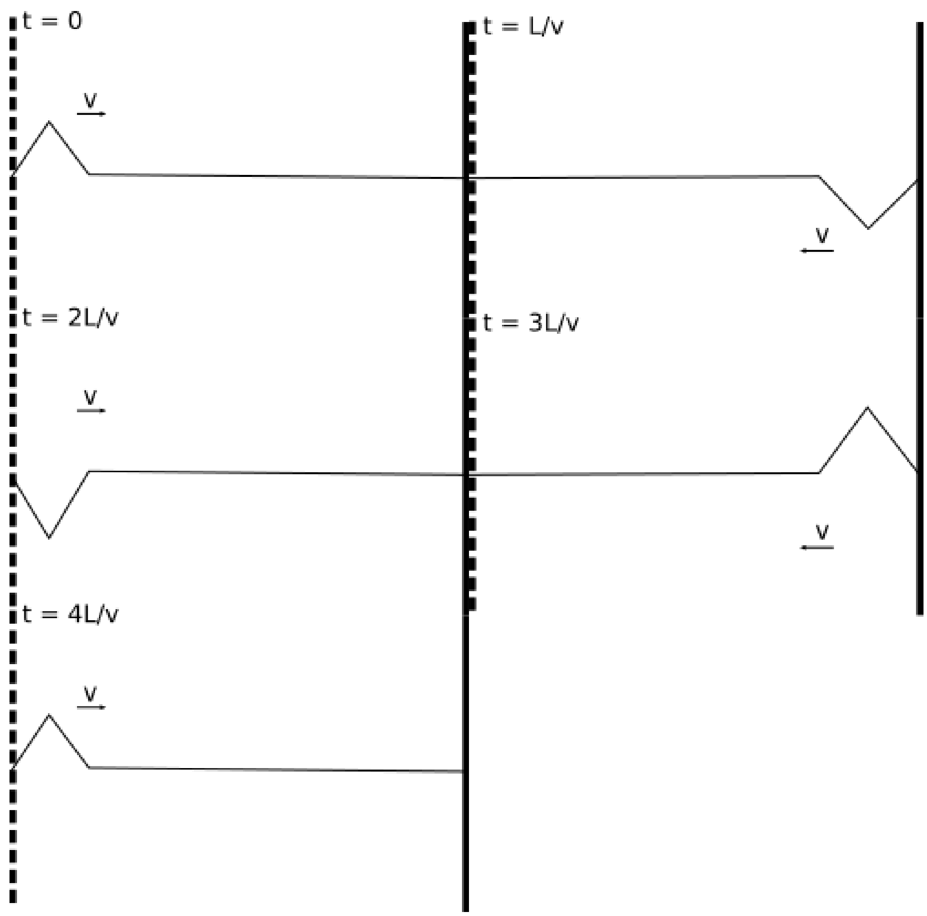
c) Utilizando

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \sqrt{g}(\sqrt{k_1}-\sqrt{k_2}) = \sqrt{g}(\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_1}}-\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_2}}),\\ \Delta k &= \frac{2\pi}{\lambda_1}-\frac{2\pi}{\lambda_2}.\end{aligned} \tag{9}$$

Temos que

$$\begin{aligned}v_g &= 0.64 \text{ m/s},\\ v_\phi &= 1.27 \text{ m/s}.\end{aligned} \tag{10}$$

②



③ A solução espacial da equação de onda será uma combinação de senos e cossenos

$$A(x) = A\cos kx + B\sin kx. \tag{11}$$

Impondo as condições nas bordas da corda

$$\begin{aligned} A(0) = 0 &\;\rightarrow\; A = 0, \\ A(L) = 0 &\;\rightarrow\; k_n = \frac{n\pi}{L}. \end{aligned} \tag{12}$$

Portanto teremos que

$$A(x) = B\sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{13}$$

Relacionando a velocidade e a frequência

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\omega_n}{k} \;\rightarrow\; \omega_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{n\pi}{L} \tag{14}$$

Substituindo os valores numéricos temos que

$$T \approx 610 \text{ N}. \tag{15}$$

④ Na situação em que $E_{\text{Total}} = E_{\text{cin}}$ temos que a a amplitude é nula

$$y_n(x,t_0) = A(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}vt_0 + \delta_n\right) = 0. \tag{16}$$

Portanto temos

$$\frac{n\pi}{l}vt + \delta_n = \frac{\pi}{2}(2m+1). \tag{17}$$

Calculando a velocidade

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_n(x,t_0)}{\partial t} &= -b_n\frac{n\pi v}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\left(\frac{n\pi v}{L}t_0 + \delta_n\right), \\ &= -b_n\frac{n\pi v}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}(2m+1)}_{(-1)^m}. \end{aligned} \tag{18}$$

A energia de um pedaço dx da corda é dado então por

$$dE_{\text{cin}} = \left(\frac{\partial y_n(x,t_0)}{\partial t}\right)^2\frac{\mu dx}{2}. = \frac{b_n^2n^2\pi^2v^2}{L^2}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\frac{\mu dx}{2}. \tag{19}$$

Integrando para obter a energia cinética total

$$E_{\text{total}} = \frac{b_n^2n^2\pi^2v^2\mu}{4L^2}. \tag{20}$$

⑤

a) As velocidades em cada corda dependem da densidade correspondente

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{\mu_i}} \quad i \; = \; 1, 2. \tag{21}$$

E analogamente os números de onda são dados por

$$k_i = \frac{\omega}{v_i} \quad i \; = \; 1, 2. \tag{22}$$

b) Essa é uma condição de continuidade. Se não tivéssemos essa condição praticamente todos os outros aspectos físicos para esse exercício seriam problemáticos. Pensando no caso trivial onde $\mu_1 = \mu_2$, violar essa equação nesse limite seria absurdo. Para que isso ocorresse algo estranho deveria estar acontecendo na junção.

c) Partindo da equação de onda, integrando no espaço ao redor do ponto de junção temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} y(x,t) dx &= v^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} dx, \\ &= v^2 \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}|_{\epsilon} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}|_{-\epsilon}. \end{aligned} \tag{23}$$

Como $y(x,t)$ é contínua temos que no limite de epsilon indo à zero o lado esquerdo é nulo de forma que temos a condição

$$\frac{\partial y_i + y_r}{\partial x} = \frac{\partial y_t}{\partial x}. \tag{24}$$

d) A condição de continuidade na origem fornece a relação

$$y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_t(0,t) \;\; \rightarrow \;\; A_i + A_r = A_t. \tag{25}$$

Enquanto que a condição relacionando as derivadas em $x = 0$ resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} &= -kA \sin{(kx - \omega t)}, \\ \frac{\partial y_i(0,t) + y_r(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial y_t(0,t)}{\partial x} \\ -k_1(A_i - A_r) \sin{(-\omega t)} &= -k_2 A_t \sin{(-\omega t)} \\ \rightarrow A_i - A_r &= \frac{k_2}{k_1} A_t. \end{aligned} \tag{26}$$

Podemos então colocar todas amplitudes em função da amplitude inicial

$$
\begin{aligned}
A_t &= \frac{2}{1+\frac{k_1}{k_2}}A_i \\
A_r &= \frac{1-\frac{k_1}{k_2}}{1+\frac{k_1}{k_2}}A_i
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\tau &= \frac{2}{1+\frac{k_1}{k_2}} = \frac{2}{1+\frac{v_1}{v_2}} \\
\rho &= \frac{1-\frac{k_1}{k_2}}{1+\frac{k_1}{k_2}} = \frac{1-\frac{v_1}{v_2}}{1+\frac{v_1}{v_2}}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

⑥ A potência é dada por

$$P = F_y\frac{\partial y}{\partial t} = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{29}$$

Com isso podemos calcular a intensidade

$$I = \bar{P(x,t)} = \frac{\omega k T A^2}{2}. \tag{30}$$

Utilizando esse resultado fica determinado a refletividade e a transmissividade

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{I_r}{I_i} = \frac{\mu_1 v_1 \omega^2 A_r^2}{\mu_1 v_1 \omega^2 A_i^2} = \frac{\left(1-\frac{v_1}{v_2}\right)^2}{\left(1+\frac{v_1}{v_2}\right)^2} \\
t &= \frac{I_t}{I_i} = \frac{\mu_2 v_2 \omega^2 A_t^2}{\mu_1 v_1 \omega^2 A_i^2} = \frac{4\frac{v_1}{v_2}}{\left(1+\frac{v_1}{v_2}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

De forma que a soma

$$r + t = 1. \tag{32}$$

Essa condição é consequência da conservação de energia.
⑦ Uma onda estacionária pode ser escrita como

$$y(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \delta). \tag{33}$$

Onde

$$A(x) = a\cos kx + b\sin kx. \tag{34}$$

As condições de contorno $A(0) = A(L_1) = 0$ fixam a e o comprimento de onda k

$$\begin{aligned} A(0) = 0 \ &\rightarrow \ a = 0, \\ A(L_1) = 0 \ &\rightarrow \ k_n = \frac{n\pi}{L_1}. \end{aligned} \tag{35}$$

Portanto

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L_1}{n}. \tag{36}$$

O mesmo pode ser feito para o outro fio de modo que

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = \frac{2L_2}{m}. \tag{37}$$

A tração na corda é a mesma em toda sua extensão, a relação geral estabelece que

$$T = \mu v^2. \tag{38}$$

Igualando para os dois pedaços da corda, utilizando que $v = \lambda\nu$

$$\begin{aligned} \mu_1\lambda_n^2\nu^2 &= \mu_2\lambda_m^2\nu^2, \\ \mu_1\frac{4L_1^2}{n^2} &= \mu_2\frac{4L_2^2}{m^2}, \\ \frac{m}{n} &= \frac{L_2\sqrt{\mu_2}}{L_1\sqrt{\mu_1}} \approx 2.5. \end{aligned} \tag{39}$$

Portanto temos que $n = 2$ e $m = 5$. O comprimento de onda em cada corda é

$$\begin{aligned} \lambda_{n=2} &= \frac{2L_1}{2} = 0.60 \text{ m}, \\ \lambda_{m=5} &= \frac{2L_2}{5} = 0.35 \text{ m}. \end{aligned} \tag{40}$$

A frequência mais baixa do sistema fica então determinada

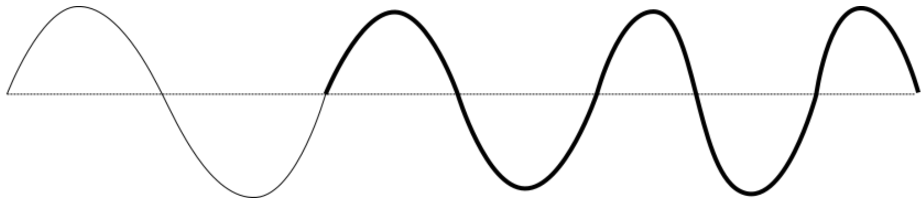
$$\nu = \sqrt{\frac{T}{\mu_1\lambda_{n=2}^2}} = 326.86 \text{ Hz}. \tag{41}$$

Note que $\mu_1 = \rho_1 A = 2.6 \times 10^{-3}$ kg/m. Pelo desenho notamos a existência de 6 nós (não contando as pontas).

⑧ O tempo pode ser calculado utilizando

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{gx}. \tag{42}$$

Separando a integral encontramos



$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{43}$$

Para o estudo dos modos normais veja o notebook no gabarito da **lista 3**.