Séries trigonométricas

São séries da forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]$$

onde a_0, a_m e b_m são constantes.

(*) observe o seguinte sobre a série trigonométrica:

(1) Cada termo da série $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ são periódicos, de período $T = \frac{2L}{m}$

(2) Cada termo tem a propriedade de repetir-se em intervalo de $2L$.

Logo segue-se que se a série converge $\forall x$, então a sua soma $f(x)$, também deve ter essa propriedade, isto é:

$$f(x+2L) = f(x).$$

ou a função a qual a série converge é periódica de período $2L$.

Para ver (1):

se $m=1$: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, tem período $T = \frac{2L}{m} = 2L$

se $m=2$: $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$, tem período $T = \frac{2L}{2} = L$.

Mas, também tem período $2L$, pois:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(x+2L)}{L}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L} + 4\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right).$$

se $m=3$: $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ tem período $T = \frac{2L}{3} = \frac{2L}{3}$.

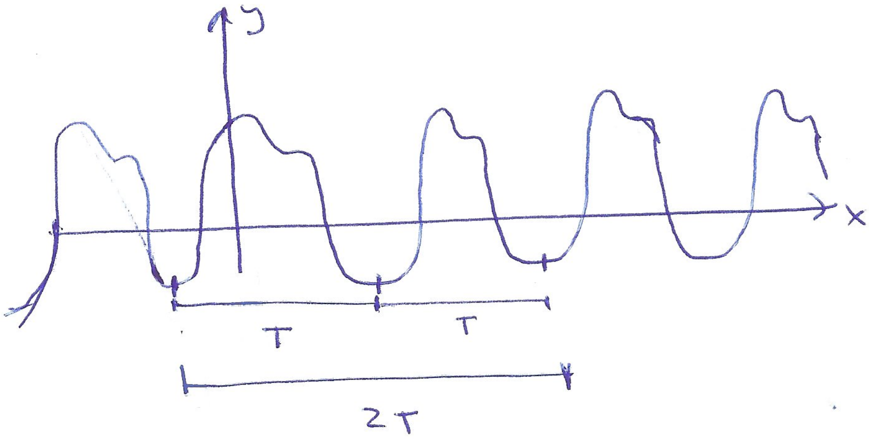
MAS também tem o período $2L$, pois:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi(x+2L)}{L}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L} + 6\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

Logo $2L$ é o único desses períodos que é compartilhado por todos os termos da série.

lembre: uma função f é periódica com período $T>0$ se

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{para todo } x.$$



função periódica.

período fundamental = é o menor valor de T para o qual vale
$$f(x+T) = f(x).$$

Já sabemos que as funções $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ onde $m = 1, 2, 3, \ldots$ são periódicas com período fundamental $T = \frac{2L}{m}$.

Além disso temos as seguintes relações de ortogonalidade:

1) $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

2) $$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \text{quaisquer } m, n.$$

3) $$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

3) $\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)\frac{L}{\pi(m-n)} - \operatorname{sen}\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)\frac{L}{\pi(m+n)}\right] =$

$= \frac{1}{2}\frac{L}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)}{m+n}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = 0.$ para $m-n \neq 0$.

se $m = n \Rightarrow \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx =$

$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1-\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)}{\frac{2m\pi}{L}}\right]_{-L}^{L} =$

$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{L}{2m\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\right]_{-L}^{L} = \frac{1}{2}(2L) = L.$

Definição: Uma série de Fourier de f é uma série trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$ onde os

coeficientes a_0, a_m, b_m são dados pelas fórmulas:

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

e $f: [-L, L] \to \mathbb{R}$ integrável, e periódica de período $2L$.

($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f integrável em $[-L, L]$ e periódica de período $2L$.)

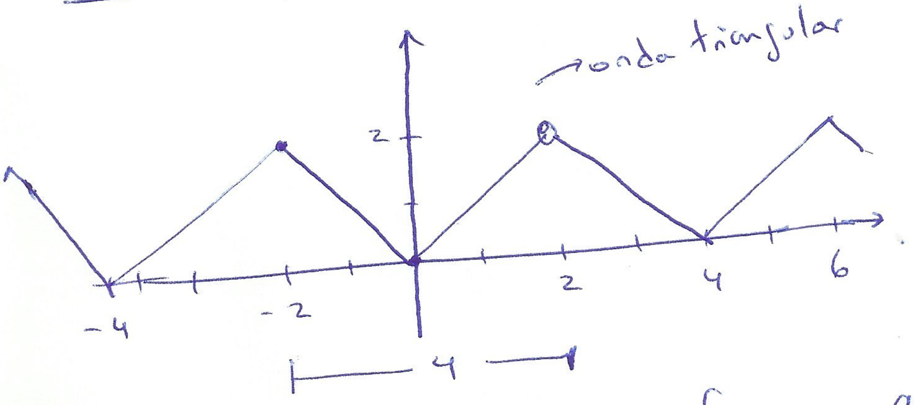
Perguntas: 1) será que esta série converge para cada x?
2) e se for convergente, será que a sua soma é $f(x)$?

Exemplo: 1) Admita que exista uma série de Fourier que converge para uma função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2, \end{cases} \quad \text{com } f(x+4) = f(x).$$

Determine os coeficientes desta série de Fourier.

Solução: período 4, e assim $T = 2L = 4 \rightarrow \boxed{L = 2}$



A série de Fourier tem a forma: $\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos(0)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} + \frac{4}{2}\right) = 2.$$

$$a_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx$$

$m > 0$

observe que $f(x)$ é uma função par, isto é: $f(x) = f(-x)$,

pois $f(-x) = \begin{cases} -(-x), & -2 \leq -x < 0 \\ -x, & 0 \leq -x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ -x, & -2 \leq x \leq 0 \end{cases} = f(x).$

a) Logo sabe-se que para funções pares integradas em intervalos simétricos $[-L, L]$, temos que $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx.$

b) Se f é ímpar: $f(x) = -f(x)$, temos que:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0.$$

$$a_m \underset{m>0}{=} \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \underset{\downarrow}{=} \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx =$$

$f(x)$ é par e $\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$ é par
logo $f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$ é par.

$$= \int_0^2 x\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx \underset{\downarrow}{=} x\,\frac{2}{m\pi}\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{m\pi}\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx =$$

integração partes: $u = x$ $\quad dv = \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx$

$du = dx$ $\quad v = \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\cdot\frac{2}{m\pi}$

$$= 0 - \frac{2}{m\pi}\int_0^2 \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx = +\frac{2}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{m\pi}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{m^2\pi^2}\left[\cos(m\pi) - \cos(0)\right] = \frac{4}{m^2\pi^2}\left[(-1)^m - 1\right].$$

$$b_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Como $f(x)$ é par e $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$ é ímpar $\Rightarrow f(x)\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$ é ímpar, logo:

$$b_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{2}\right)dx = 0.$$

Portanto a série de Fourier de f é:

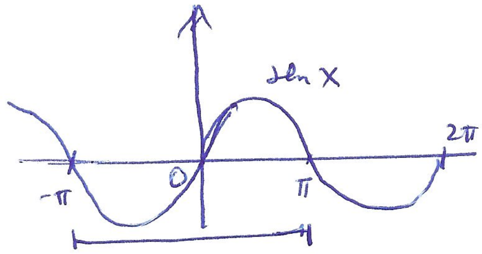
$$1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{4}{m^2\pi^2}\left((-1)^m - 1\right)\right]\cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}(-2)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}.$$

Exemplo: $f(x) = \operatorname{sen} x, \; -\pi \leq x \leq \pi$.

A série de Fourier de f: Neste caso sen x é periódica de período $T = 2\pi \Rightarrow L = \pi$.



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left[-1+1\right] = 0.$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos(mx)\,dx = 0$$

sen x é ímpar, $\cos(mx)$ é par $\Rightarrow$ sen x cos(mx) ímpar

pois $\operatorname{sen}(-x)\cos(mx) = -\operatorname{sen} x \cos(mx)$.

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(mx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{1.\pi.x}{\pi}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\pi = 1, & \text{para } m = 1. \\ 0, & \text{para } m \neq 1 \end{cases}$$

por propriedade de ortogonalidade (3)

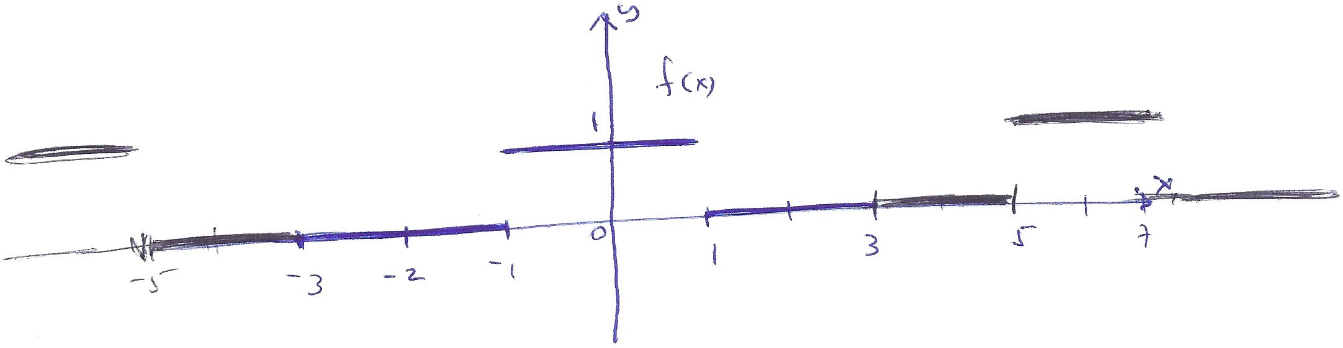
Logo a série de Fourier de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\pi}\right)\right] = b_1 \operatorname{sen} x = \boxed{\operatorname{sen} x}$$

Exemplo: $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 3 \end{cases}$ com $f(x+6) = f(x)$

Calcular a série de Fourier de f.

$T = 6 \Rightarrow \boxed{L = 3}$, pois f é periódica de período 6.



$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{3}\,x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}.$$

$$a_m = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{3}\right)\cdot\frac{3}{m\pi}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{m\pi}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right) - \mathrm{sen}\left(-\frac{m\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right), \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

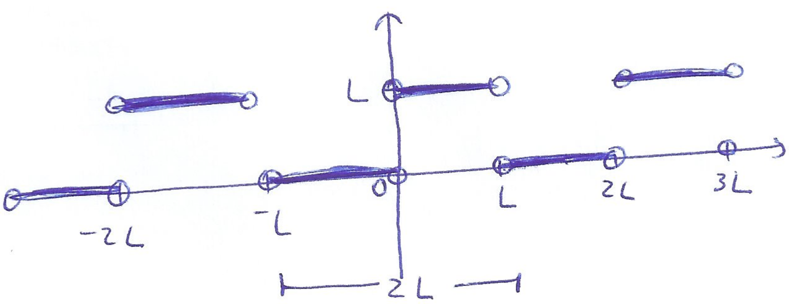
$$b_m = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{3}\right)dx = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right)\cdot\frac{3}{m\pi}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{m\pi}\left[\cos\left(\frac{m\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{m\pi}{3}\right)\right] = -\frac{1}{m\pi}\left[\;\right] = 0.$$

Logo a serie de Fourier fica:

$$\frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{3}\right).$$

Exemplo: $f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0 \\ L, & 0 < x < L \end{cases}$ $\qquad f(x+2L) = f(x), \ \forall x.$



onda quadrada

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} L = L$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0, \quad m \neq 0.$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= -\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\left(\frac{L}{m\pi}\right)\Big|_0^L = -\cos\left(\frac{m\pi L}{L}\right)\frac{L}{m\pi} + \cos\left(\frac{m\pi . 0}{\cancel{L}}\right)\frac{L}{m\pi}$$

$$= \frac{L}{m\pi}\left(1 - \cos(m\pi)\right) = \begin{cases} 0, & m = \text{par} \\ \dfrac{2L}{m\pi}, & m = \text{impar} \end{cases}$$

Serie de Fourier: $\displaystyle \frac{L}{2} + \sum_{\substack{m=1 \\ \to m = \text{impar}}}^{\infty} \frac{2L}{m\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) =$

$$= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)}{(2n-1)}$$

pergunta será que a serie de Fourier converge a $S(x)$?

Será que $S(x) = f(x)$? Não sempre

Neste exemplo para $x = \pm nL$, $S(\pm nL) = \frac{L}{2}$

Mas $f(\pm L) \neq \frac{L}{2}$, Logo a serie de Fourier não converge a funsão f nesses pontos $\pm L$. nem em os pontos $\pm nL$.

observe que os pontos $0, \pm L$ são pontos de descontinuidade.

observasão: A fim de garantir a convergência da serie de Fourier para a funsão f com a qual foram calculados os seus coeficientes de Fourier, e essencial impor condisões adicionais a funsão f. Entre tais condisões temos: f ser uma funsão continua por partes ou seccionalmente continua.