MAT0234 Medida e Integração
Prof. Jorge Adrian Beloqui

Aula De Medida Exterior Com Demonstrações

1 Medida exterior

Com as definições que temos até agora, aparecem dois problemas:
1. dizemos que a medida de Lebesgue em [0,1] é definida sobre os Borelianos, e que $\mu([a,b]) = (b-a)$. Também temos em $\mathbb{R}^2$, $\mu[a,b] \times [c,d]$, etc. Como calcular μ sobre um Boreliano dado? Este cálculo é sempre possível?
2. Ou também, se definirmos uma medida λ sobre uma família de conjuntos $\mathcal{F}$, por exemplo uma álgebra (não necessariamente σ-álgebra), será possível estendé-la para a σ-álgebra gerada ou para outra? Sempre? Sob quais condições? Esta extensão será única?
Por outras palavras: até onde a definição de λ sobre uma família de conjuntos "prende"a definição em outros conjuntos?
Por último, podemos ter uma medida definida numa σ álgebra, mas queremos estendé-la para outra σ álgebra. Por exemplo, se ν estiver definida numa σ álgebra (por exemplo, os Borelianos) queremos tornar mensuráveis todos os subconjuntos de um boreliano B com $\nu(B) = 0$.
Por esta razão, dada uma função de conjunto λ a valores reais, definiremos a **medida exterior** associada denotada por λ^*. Ela não será necessariamente uma medida, porque não precisará ser aditiva (nem portanto σ aditiva).
De modo análogo, para a "medida"λ faremos o seguinte: definiremos a λ^* sobre $\wp(X)$, a partir de λ. E depois restringiremos a alguns conjuntos . Esta λ^* será chamada de **medida exterior**. Mas não necessariamente será uma medida.

Definição: $\lambda^* : \wp(X) \to [0,+\infty]$ é uma **medida exterior** se ela verificar:

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$.
2. Se $A \subset B$ temos $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$. (monotonicidade)
3. $\lambda^*(\cup_1^{+\infty} A_j) \leq \sum_1^{+\infty} \lambda^*(A_j)$. (σ-sub-aditividade)

Ou seja, ela não é σ-aditiva nem aditiva necessariamente.
Faremos como dizemos acima: Damos inicialmente uma "medida"λ numa família $\mathcal{F}$ ou álgebra de conjuntos, e a partir desta definimos a medida exterior. Como será este processo?
Antes, uma definição para tirar as aspas da palavra "medida".

Definição: Uma **pré-medida** λ é uma função $\lambda : \mathcal{F} :\to [0,+\infty]$, onde $\mathcal{F}$ é uma álgebra, que verifica:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$
2. se A_j *e* $\cup_1^{+\infty} A_j \in \mathcal{F}$ então $\lambda(\cup_1^{+\infty} A_j) = \sum_1^{+\infty} \lambda(A_j)$ se os A_j forem disjuntos 2 a 2.
   Observação 1: este é o caso da pré-medida de Lebesgue, em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,1]; [0,1]\times [0,1]$, etc.
   Observação 2: como sempre, a aditividade segue da σ-aditividade tomando $A_j = \emptyset$ desde um j em diante.
   Resumindo: O que fazemos para definir uma medida? Definimos primeiramente uma pré-medida numa família de conjuntos que chamamos de "elementares"(por exemplo os intervalos (a,b]). Depois estendemos a

uma medida exterior em todo $\wp(X)$. A medida exterior de um conjunto E é dada pelo ínfimo das pré-medidas sobre os conjuntos elementares que cobrem E.Daí pegamos os conjuntos mensuráveis para a medida exterior. Eles constituem uma σ-álgebra. Restringimos a medida exterior a esta σ-álgebra e obtemos uma medida. Na qual sabemos calcular a medida de qualquer conjunto, mediante a fórmula do ínfimo.
Observação 3: se ficar mais claro, em todas as demonstrações podemos pensar na pré-medida de Lebesgue e nos elementares sendo os intervalos (a,b] ou os retângulos (a,b]x(c,d].

Proposição 1. *Seja $\mathcal{F} \subset \wp(X)$ e $\lambda : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ tal que $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ e $\lambda(\emptyset) = 0$. Dado $A \subset X$, definimos:*

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_j) \mid E_j \in \mathcal{F} \text{ e } A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}$$

Então λ^* é uma medida exterior.

Demonstração. λ^* está definida para todo $A \subset X$, porque se tomamos $E_j = X$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. Obviamente, tomando $E_j = \emptyset$, $\lambda^*(\emptyset) = 0$. Para ver que $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ se $A \subset B$, basta observar que se $B \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ com $E_j \in \mathcal{F}$, então $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} E_j$.
Para mostrar a subaditividade, seja $\{A_j\} \subset \wp(X)$ uma sequência de subconjuntos de X e tomemos $\varepsilon > 0$. Para cada A_j existe uma sequência $\{B_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ tal que $A_j \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_j^k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_j^k) \leq \lambda^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ pois $\lambda^*(A_j)$ é um ínfimo. Assim, $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \cup_{j,k=1}^{\infty} B_j^k$ e :

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} \lambda(B_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) + \varepsilon$$

Como tomamos $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue o resultado.□ □

Definição: Por isso, λ^* chama-se a medida exterior associada à λ.

Exercício. seja $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$ e definimos $\lambda(X) = 1$. Calcule λ^*.

Exercício. seja $\mathcal{A} = \{X, \emptyset, B, B^c\}$ e definimos $\lambda(X) = 2$; $\lambda(B) = \lambda(B^c) = 1$. Calcule λ^*.

Definição 1.1 (Carathéodory)**.** Dada uma medida exterior λ^* em X, um conjunto $A \subset X$ se diz **λ^*-mensurável** se:

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c) \ \ \forall E \subset X$$

Observemos que, dada a subaditividade de λ^*, para provar que A é mensurável basta ver que $\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c)$ para todo $E \subset X$. Se $\lambda^*(E) = +\infty$ isso é imediato. Portanto basta ver que a desigualdade é válida para todo $E \subset X$ com $\lambda^*(E) < \infty$.

Exercício. Mostre que se $\lambda^*(A) = 0$ então A é mensurável para λ^*.

Exercício. Se $B \subset A$ e $\lambda^*(A) = 0$, então B é mensurável para λ^*.

Exercício. seja $\mathcal{A} = \{[0,1],\ \emptyset,\ [0,1/3],\ [2/3,1]\}$ e definimos $\lambda([0,1]) = 2$; $\lambda([0,1/3]) = \lambda([2/3,1]) = 1$. Calcule λ^* e determine os conjuntos mensuráveis para λ^*.

Teorema 2 (Carathéodory)**.** *Se λ^* é uma medida exterior em X, a família $\mathcal{M}$ dos conjuntos mensuráveis para λ^* é uma σ-álgebra e λ^* restrita a $\mathcal{M}$ é uma medida completa.*

Demonstração. Observamos que como a definição da mensurabilidade a respeito de λ^* é simétrica a respeito de complementares, $\mathcal{M}$ é fechada por complementares. Também, se $A, B \in \mathcal{M}$ então $A \cup B \in \mathcal{M}$ porque:

$$\begin{aligned}\lambda^*(E) &= \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c) \\ &= \lambda^*(E \cap A \cap B) + \lambda^*(E \cap A \cap B^c) + \lambda^*(E \cap A^c \cap B) + \lambda^*(E \cap A^c \cap B^c)\end{aligned}$$

Como $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ por subaditividade na identidade acima temos que as três primeiras parcelas são $\geq \lambda^*(E \cap (A \cup B))$ e portanto:

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap (A \cup B)) + \lambda^*(E \cap (A \cup B)^c)$$

Assim $\mathcal{M}$ é uma álgebra.
Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap B = \emptyset$, segue que

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \cup B) &= \lambda^*((A \cup B) \cap A) + \lambda^*((A \cup B) \cap A^c) \\ &= \lambda^*(A) + \lambda^*(B \cap A^c) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)\end{aligned}$$

Então λ^* é finitamente aditiva em $\mathcal{M}$.
Vejamos agora que é σ-aditiva. Seja $\{A_j\}$ sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{M}$ e $B_n = \cup_{j=1}^n A_j$, $B = \cup_{n=1}^\infty B_n = \cup_{j=1}^\infty A_j$, então, dado $E \subset X$, segue que:

$$\begin{aligned}\lambda^*(E \cap B_n) &= \lambda^*(E \cap B_n \cap A_n) + \lambda^*(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \lambda^*(E \cap A_n) + \lambda^*(E \cap B_{n-1})\end{aligned}$$

e por indução

$$\lambda^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \lambda^*(E \cap A_j)$$

Como $B_n \subset B \Rightarrow B^c \subset B_n^c$ e λ^* é monótona, temos:

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap B_n) + \lambda^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^n \lambda^*(E \cap A_j) + \lambda^*(E \cap B^c)$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$ segue que:

$$\begin{aligned}\lambda^*(E) &\geq \sum_{j=1}^\infty \lambda^*(E \cap A_j) + \lambda^*(E \cap B^c) \\ &\geq \lambda^*\left(\cup_{j=1}^\infty (E \cap A_j)\right) + \lambda^*(E \cap B^c) \\ &= \lambda^*(E \cap B) + \lambda^*(E \cap B^c) \\ &\geq \lambda^*(E)\end{aligned}$$

Logo as desigualdades são igualdades e se agora tomarmos $E = B$ e substituirmos temos:

$$\lambda^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(B \cap A_j) + \lambda^*(B \cap B^c) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j)$$

Assim λ^* é σ-aditiva em $\mathcal{M}$.
O caso em que $\lambda^*(A) = 0$ é um exercício acima. $\square$

Para estender medidas de uma álgebra para uma σ-álgebra usaremos esse teorema.
Vejamos agora que se ν é uma pré-medida, a medida exterior associada ν^* estende ν, ou seja ela vale igual que ν na álgebra onde ν está definida.

Proposição 3. *Seja ν uma pré-medida e ν^* a medida exterior associada. Então:*

(a) $\nu^* \restriction_{\mathcal{A}} = \nu$

(b) Todo conjunto de $\mathcal{A}$ é ν^*-mensurável.

Demonstração. (a) Seja $E \in \mathcal{A}$, queremos ver que $\nu^*(E) = \nu(E)$. Seja E coberto por $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ com $A_j \in \mathcal{A}$. Tomemos $B_n = E \cap (A_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} A_j)$. Daí que os B_n são disjuntos dois a dois, $B_n \in \mathcal{A}$ e:

$$\nu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$$

onde a primeira igualdade deve-se a que ν é uma pré-medida. Como isto ocorre para uma cobertura qualquer, temos $\nu(E) \leq \nu^*(E)$. A desigualdade inversa segue tomando $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ com $A_1 = E$ e $A_j = \emptyset$ para todo $j \geq 2$.

(b) Dados $A \in \mathcal{A}$, $E \subset X$ e $\varepsilon > 0$, pela definição de ínfimo, existe uma cobertura $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} B_j$, com $\sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j) \leq \nu^*(E) + \varepsilon$. Pela aditividade de ν em $\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \nu^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j \cap A^c) \\ &\geq \nu^*(E \cap A) + \nu^*(E \cap A^c) \end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, segue que A é ν^* mensurável.

$\square$

Por último o teorema de extensão que mostra a "quase" unicidade da extensão a partir de uma álgebra com uma pré-medida.

Teorema 4. *Seja $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ uma álgebra, λ_0 uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Então existe uma medida λ em $\mathcal{M}$ cuja restrição a $\mathcal{A}$ é λ_0, como na Proposição anterior. Se ν for outra medida em $\mathcal{M}$ que estende λ_0, então $\nu(E) \leq \lambda(E)$ para todo $E \in \mathcal{M}$ com igualdade se $\lambda(E) < +\infty$. Se λ_0 for σ-finita, então λ é a única extensão a uma medida de $\mathcal{M}$.*

Demonstração. A primeira afirmação segue do teorema de Carathéodory e da Proposição 3 porque a σ-álgebra dos conjuntos λ^*-mensuráveis inclui $\mathcal{A}$ e portanto $\mathcal{M}$, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$.
Se ν for outra extensão, tomamos $E \in \mathcal{M}$ e $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ com $A_j \in A$, então

$$\nu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_0(A_j)$$

Logo $\nu(E) \leq \lambda(E)$. Se $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, então $\nu(A) = \lim_n \nu(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \lim_n \lambda(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \lambda(A)$.
Se $\lambda(E) < \infty$, podemos tomar uma sequência $\{A_j\}$ *e* $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j;\ A_j \in \mathcal{A}$ tal que $\lambda(A) \leq \lambda(E) + \varepsilon$, logo, $\lambda(A \setminus E) \leq \varepsilon$ e:

$$\begin{aligned} \lambda(E) \leq \lambda(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \lambda(A \setminus E) \\ \leq \nu(E) + \varepsilon \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que $\lambda(E) = \nu(E)$.
Por último, se X for σ-finito, então $X = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ com $\lambda_0(A_j) < +\infty$. Podemos supor A_j disjuntos dois a dois. Logo, para todo $E \in \mathcal{M}$ temos:

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap A_j) = \nu(E)$$

$\square$