MAE0224 - Probabilidade II
Exercícios em Classe
Prof. Vanderlei

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $X_n \sim U(0,n)$. Defina a sequência $(Y_n)_{n\geq 1}$ com

$$Y_n = 1 \ \ se \ \ X_{2n} > X_{2n-1} \ \ e \ \ Y_n = 0 \ \ c.c.$$

Prove que $(Y_n)_{n\geq 1}$ satisfaz a primeira LFGN de Kolmogorov.

Solução

Devemos provar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(Y_n)}{n^2} < \infty$.
Calculemos

$$P(Y_n = 1) = P(X_{2n} > X_{2n-1}) =$$

$$\frac{1}{2n-1}\int_{)}^{2n-1} P(X_{2n} > X_{2n-1}|X_{2n-1} = x)dx =$$

$$\frac{1}{2n-1}\int_{)}^{2n-1} P(X_{2n} > x|X_{2n-1} = x)dx = \frac{1}{2n-1}\int_{)}^{2n-1} P(X_{2n} > x)dx =$$

$$\frac{1}{2n-1}\int_{)}^{2n-1} [\int_{x}^{2n} \frac{1}{2n}dy]dx = \frac{1}{2n-1}\int_{)}^{2n-1} [\frac{2n-x}{2n}]dx =$$

$$\frac{1}{2n-1}\int_{)}^{2n-1} dx - \frac{1}{2n(2n-1)}\frac{1}{2n-1}\int_{)}^{2n-1} xdx =$$

$$1 - \frac{1}{2n(2n-1)}\frac{(2n-1)^2}{2} = \frac{2n+1}{4n}.$$

Temos também que $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{2n+1}{4n} = \frac{2n-1}{4n}$ e que

$$Var(Y_n) = \frac{2n+1}{4n}.\frac{2n-1}{4n} = \frac{4n^{-}1}{16n^2} \leq \frac{4n^2}{16n^2} = \frac{1}{4}.$$

Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(Y_n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4.n^2} < \infty.$$

2) a) Seja X uma variável aleatória com distribuição $X \sim U(0,1)$. Qual a função densidade de probabilidade de $Y = \tan(\pi X - \frac{\pi}{2})$.

b) Seja $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a Y. Qual o limite em distribuição de

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n(\prod_{i=1}^n |X_i|)^{\frac{1}{n}}},$$

onde $X_1, X_2, ...X_n, ...$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$.

Solução

a) A função de distribuição de Y é:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\tan(\pi X - \frac{\pi}{2}) \leq y) = P(\pi X - \frac{\pi}{2} \leq \arctan(y)) =$$

$$P(\pi X \leq \arctan(y) + \frac{\pi}{2})) = \int_0^{\frac{1}{\pi}(\arctan(y)+\frac{\pi}{2})} dx =$$

$$\frac{1}{\pi}(\arctan(y) + \frac{\pi}{2}).$$

Portanto, a função densidade de probabilidade de Y é

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = d\frac{\frac{1}{\pi}(\arctan(y) + \frac{\pi}{2})}{dy} = \frac{1}{\pi(1-y^2)},$$

isto é, Y tem distribuição de Cauchy padrão.

b) Observe que, por exercícios anteriores, $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ também tem distribuição de Cauchy padrão.

Note também que

$$-\ln \prod_{i=1}^n |X_i|)^{\frac{1}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n -\ln(X_i)}{n} \to^P E[-\ln(X_1)] = 1.$$

Portanto

$$\prod_{i=1}^n |X_i|)^{\frac{1}{n}} = e^{-[-\ln(\prod_{i=1}^n |X_i|)^{\frac{1}{n}}]} \to^P e^{-1}.$$

Pelo teorema de Slutsky concluimos que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n(\prod_{i=1}^{n} |X_i|)^{\frac{1}{n}}} \to^D e.Y$$

onde Y tem distribuição de Cauchy.

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição Beta(2,1). Verificar se

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(1-X_i)}{\sum_{i=1}^{n} X_i^4}$$

converge quase certamente. Qual o limite?

Solução

A variável aleatória X, com distribuição $B(a,b)$ tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Assim

$$E[X^k] = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 x^k x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx =$$

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 x^{k+a-1}(1-x)^{b-1} dx =$$

$$\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+k+b)}$$

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(k+a+b)}{\Gamma(a+k)\Gamma(b)} x^{k+a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+k+b)}.$$

Portanto, se X_1 tem distribuição $B(2,1)$, $E[X_1^k] = \frac{\Gamma(3)\Gamma(2+k)}{\Gamma(2)\Gamma(3+k),}$ com

$$E[X_1] = \frac{2}{3}, \quad E[X_1^2] = \frac{1}{2}$$

, $E[X_1^4] = \frac{1}{3}$.

Podemos escrever

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i(1-X_i)}{\sum_{i=1}^n X_i^4} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \Sigma_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n X_i^4} =$$

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\Sigma_{i=1}^n X_i^2}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^4}{n}}.$$

Pela LFGN de Kolmogorov temos $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^{qc} \frac{2}{3}$, $\frac{\Sigma_{i=1}^n X_i^2}{n} \to^{qc)} \frac{1}{2}$, e $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^4}{n} \to^{qc} \frac{1}{3}$.

Concluimos que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i(1-X_i)}{\sum_{i=1}^n X_i^4} \to^{qc} \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial de parâmetro λ. Seja N uma variável aleatória com distribuição

$$P(N=k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1,2,3,...$$

Encontre a função caracterí́stica de $Y = \Sigma_{i=1}^N X_i$. Qual a distribuição de Y?

Solução:

$$E[e^{tY}] = E[e^{t.\Sigma_{i=1}^N X_i}] = E[e^{t.\Sigma_{i=1}^N X_i}|N]$$

que é uma variável aleatória assumindo valores

$$E[e^{t.\Sigma_{i=1}^N X_i}|N=n] = (\frac{\lambda}{\lambda - it})^n.$$

Portanto

$$E[e^{tY}] = E[(\frac{\lambda}{\lambda - it})^N] = \Sigma_{k=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{\lambda - it})^k p(1-p)^{k-1} = \frac{p\lambda}{p\lambda - it}$$

Concluimos que $Y \sim Poisson(p\lambda)$.

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de varaáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Mostre que $(Y_n)_{n\geq 1}$, com $Y_n = n\min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ não converge em probabilidade para X, onde X é o limite em distribuição de $(Y_n)_{n\geq 1}$.

Solução:

Observe que

$$P(Y_n \leq y) = P(n\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} \leq y) = P(\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} \leq \frac{y}{n}) =$$

$$1 - P(\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} > \frac{y}{n}) = 1 - P(X_1 > \frac{y}{n}, X_2 > \frac{y}{n}, ..., X_n > \frac{y}{n}) =$$

$$1 - \Pi_{i=1}^{n} P(X_i > \frac{y}{n}) = 1 - \Pi_{i=1}^{n} P(X_1 > \frac{y}{n}) = 1 - P(X_1 > \frac{y}{n})^n = 1 - (1 - \frac{y}{n})^n.$$

Portanto $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq y) = 1 - e^{-y}$ e X tem distribuição exponencial padrão

Contudo Y_n não converge em probabilidade para X :

$$P(|Y_n - X| \leq \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq Y_n - X \leq \varepsilon)) =$$

$$P(X - \varepsilon \leq Y_n \leq X + \varepsilon) = \int_0^{\infty} P(X - \varepsilon \leq Y_n \leq X + \varepsilon | X = x) e^{-x} dx =$$

$$\int_0^{\infty} P(x - \varepsilon \leq Y_n \leq x + \varepsilon | X = x) e^{-x} dx =$$

$$\int_0^{\infty} P(x - \varepsilon \leq Y_n \leq x + \varepsilon) e^{-x} dx.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - X| \leq \varepsilon) = \int_0^{\infty} P(x - \varepsilon \leq X \leq x + \varepsilon) e^{-x} dx.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos $\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - X| \leq \varepsilon) = 0$ e Y_n não converge em probabilidade para X.