De acordo com a lei de Biot-Savart, o campo magnético gerado por uma distribuição de corrente com densidade de corrente constante é dada por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times \hat{\imath}}{\imath^2} d\tau'$$

onde $\vec{J}$ (a densidade volumétrica de corrente) deve satisfazer, de acordo com a eq. de continuidade,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

É importante ter em mente os casos em que a lei de Biot-Savart pode ser aplicada e aqueles em que ela não pode ser usada.

Por exemplo, sabemos que a densidade de carga elétrica de uma carga pontual na posição $\vec{r}(t)$ é

$$\rho = q\,\delta^3(\vec{r})$$

e, portanto, a densidade de corrente associada seria

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = q\,\delta^3(\vec{r})\,\vec{v}$$

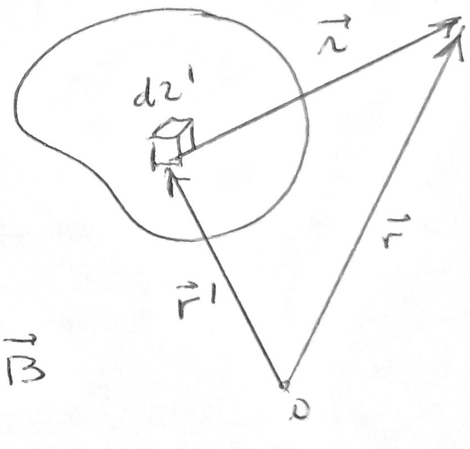
se a velocidade da carga é $\vec{v}$.

Entretanto, $\vec{J} = q\,\delta^3(\vec{r}(t))\,\vec{v}$ não é uma corrente estacionária e, portanto, o campo magnético de uma carga pontual isolada não pode ser obtido via Biot-Savart, nem mesmo quando $\vec{v}$ é cte.

Calculemos agora o divergente do campo magnetostático, ou seja

$$\vec{\nabla}\cdot\left\{\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\,d\tau'\right\}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{J}\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)d\tau'$$



Como (lista 1a - ex. 2-iv)

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

podemos escrever

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{J}\times\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) = \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\cdot\cancelto{0}{(\vec{\nabla}\times\vec{J})} - \vec{J}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)$$

$\vec{J}(\vec{r}\,')$ é função de $\vec{r}\,'$

$\vec{\nabla}\times$ envolve derivadas com respeito a $\vec{r}$.

Além disso (lista 1a - ex. 9c)

$$\vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \vec{0}$$

Portanto

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \Rightarrow \vec{B} \text{ é um campo solenóide}$$

O teorema da divergência então implica que para qquer volume V com fronteira S

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, d\tau = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Ou seja, o fluxo magnético através de qquer superfície fechada é nulo. Essa é uma propriedade bastante distinta com respeito àquela do campo elétrico, onde as linhas de campo elétrico emanam ou convergem para uma carga pontual produzindo um fluxo de campo elétrico diretamente proporcional à carga elétrica total englobada pela superfície S.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ implica na inexistência no Eletromagnetismo de monopolos magnéticos.

Ou seja, no Eletromagnetismo campos magnéticos são sempre gerados por cargas em movimento.

Calculemos agora o rotacional do campo magnetostático

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau'$$

Usando

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

e o fato de que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ (corrente estacionária)

temos

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \cancelto{\vec{0}}{\left(\frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{J}} - (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{r}}{r^2} + \vec{J} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right)$$

$\vec{J}$ é função de $\vec{r}\,'$

$\vec{\nabla}$ possui derivadas com respeito a $\vec{r}$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{J}\times\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right) = \vec{J}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right) - (\vec{J}\cdot\vec{\nabla})\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}$$

Já vimos anteriormente que

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right) = 4\pi\,\delta^3(\vec{\imath})$$

O operador diferencial do 2º termo é

$$\vec{J}\cdot\vec{\nabla} = J_x\frac{\partial}{\partial x} + J_y\frac{\partial}{\partial y} + J_z\frac{\partial}{\partial z}$$

Como $\imath = |\vec{r}-\vec{r}'| = \left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2}$,

então

$$-(\vec{J}\cdot\vec{\nabla})\frac{\hat{\imath}}{\imath^2} = (\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\hat{\imath}}{\imath^2} = (\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\vec{\imath}}{\imath^3}$$

com

$$\vec{J}\cdot\vec{\nabla}' = J_x\frac{\partial}{\partial x'} + J_y\frac{\partial}{\partial y'} + J_z\frac{\partial}{\partial z'}$$

Perceba que $(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\dfrac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3}$ é um vetor

$$(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3} = (\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\left\{\frac{\mathscr{r}_x\hat{x}+\mathscr{r}_y\hat{y}+\mathscr{r}_z\hat{z}}{\mathscr{r}^3}\right\}$$

Tomemos a componente x por exemplo

$$(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\left(\frac{\vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3}\right)_x = (\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right)$$

$$= J_x\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right) + J_y\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right) + J_z\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right)$$

De acordo com a regra do produto

$$J_x\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left[J_x\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right)\right] - \frac{\partial J_x}{\partial x'}\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right)$$

$$J_y\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right) = \frac{\partial}{\partial y'}\left[J_y\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right)\right] - \frac{\partial J_y}{\partial y'}\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right)$$

$$J_z\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right) = \frac{\partial}{\partial z'}\left[J_z\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right)\right] - \frac{\partial J_z}{\partial z'}\left(\frac{x-x'}{\mathscr{r}^3}\right)$$

Portanto

$$(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right)_x = \vec{\nabla}'\cdot\left[\left(\frac{x-x'}{\imath^3}\right)\vec{J}\right] - \left(\frac{x-x'}{\imath^3}\right)\cancel{(\vec{\nabla}'\cdot\vec{J})}^{\,0}$$

corrente estacionária

E de forma similar

$$(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right)_y = \vec{\nabla}'\cdot\left[\left(\frac{y-y'}{\imath^3}\right)\vec{J}\right]$$

$$(\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\left(\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right)_z = \vec{\nabla}'\cdot\left[\left(\frac{z-z'}{\imath^3}\right)\vec{J}\right]$$

De volta a $\vec{\nabla}\times\vec{B}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left\{\vec{J}(\vec{r}')\,4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') + (\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\right\} d\tau'$$

$$= \mu_0\vec{J}(\vec{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V (\vec{J}\cdot\vec{\nabla}')\frac{\hat{\imath}}{\imath^2}\, d\tau'$$

$$= \mu_0\vec{J}$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}'\cdot\left[\left(\frac{x-x'}{\imath^3}\right)\vec{J}\right]d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}'\cdot\left[\left(\frac{y-y'}{\imath^3}\right)\vec{J}\right]d\tau'$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}'\cdot\left[\left(\frac{z-z'}{\imath^3}\right)\vec{J}\right]d\tau'$$

$$\int_V \vec{\nabla}' \left[\left(\frac{x-x'}{r^3}\right)\vec{J}\right] d\tau' = \oint_S \left(\frac{x-x'}{r^3}\right)\vec{J}\cdot d\vec{a}'$$

a integral volumétrica pode ser feita no espaço inteiro e se a densidade de corrente $\vec{J}$ vai a zero no infinito temos finalmente

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

lei de Ampère na forma diferencial

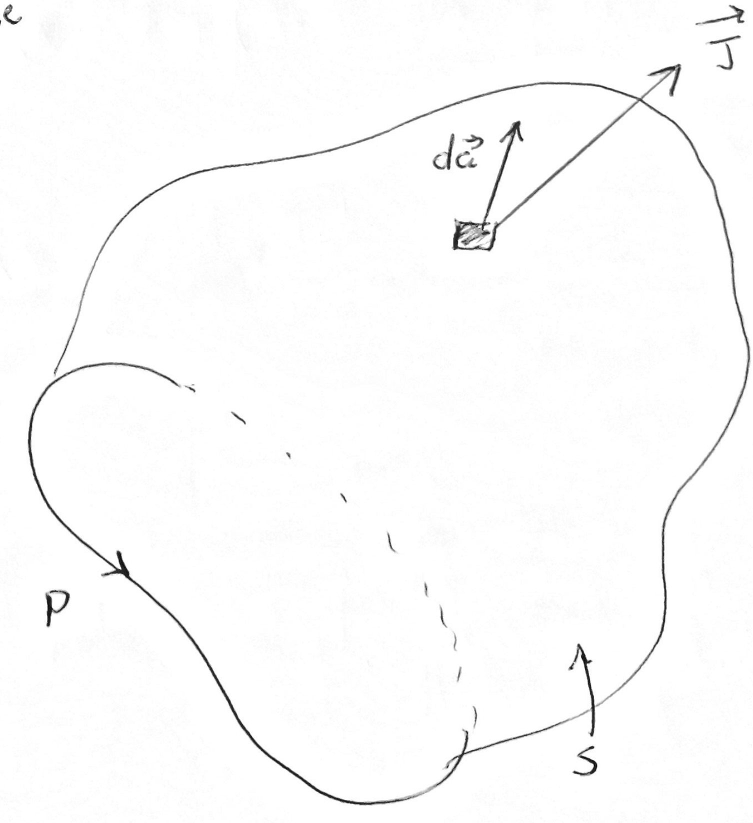
Usando o teorema de Stokes

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{a} = \oint_P \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{J}\cdot d\vec{a}}_{\text{corrente total através de } S} = \mu_0 I$$

P curva suporte de S

$$\boxed{\oint_P \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$$

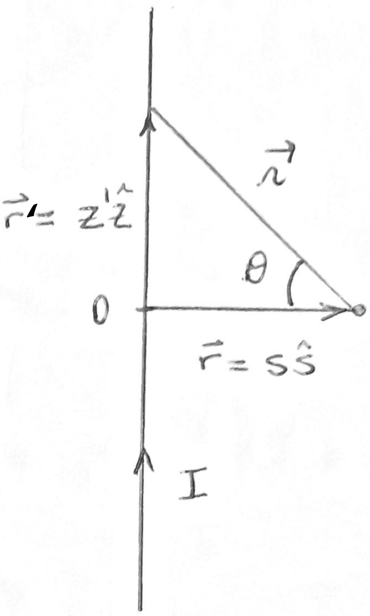
corrente total englobada por P



Exemplo 1: fio infinito com corrente I

Nesse caso o campo pode ser tanto obtido por argumentos de simetria via lei de Ampère quanto por integração direta com Biot-Savart.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\, dl'$$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}' = z'\hat{z} \\ \vec{r} = s\hat{s} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}' = s\hat{s} - z'\hat{z} \\ \mathscr{r}^2 = s^2 + z'^2 \end{array}$$

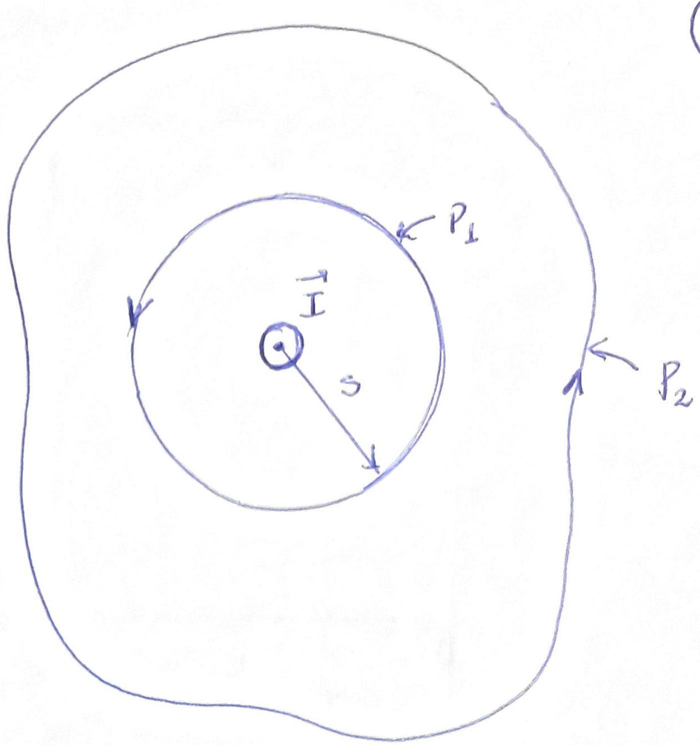
$$\frac{\vec{I} \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} = \frac{\vec{I} \times \vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3} = \frac{I\hat{z} \times (s\hat{s} - z\hat{z})}{(s^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{Is\,\hat{\phi}}{(s^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Então

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I s \hat{\phi}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s^2 + z'^2)^{3/2}}\, dz' \quad , \quad \cos\theta = \frac{s}{(s^2 + z'^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I \hat{\phi}}{4\pi s} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\, \hat{\phi}$$

$$\vec{B}(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}$$

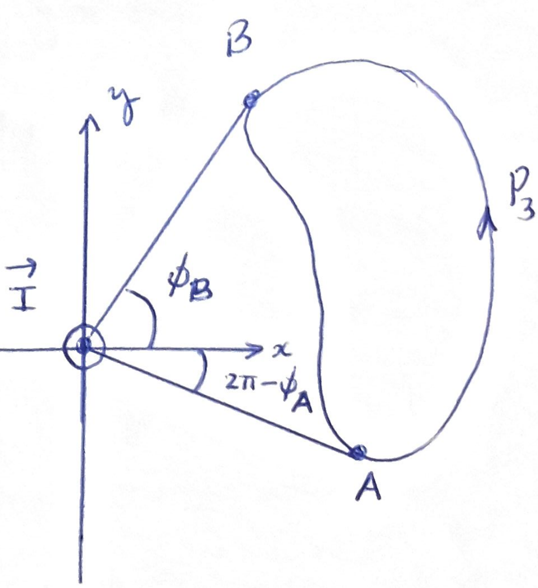


$$\oint_{P_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}\right)\cdot\left(s\,d\phi\,\hat{\phi}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

$$\oint_{P_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{P_2}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}\right)\cdot\left(ds\,\hat{s} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

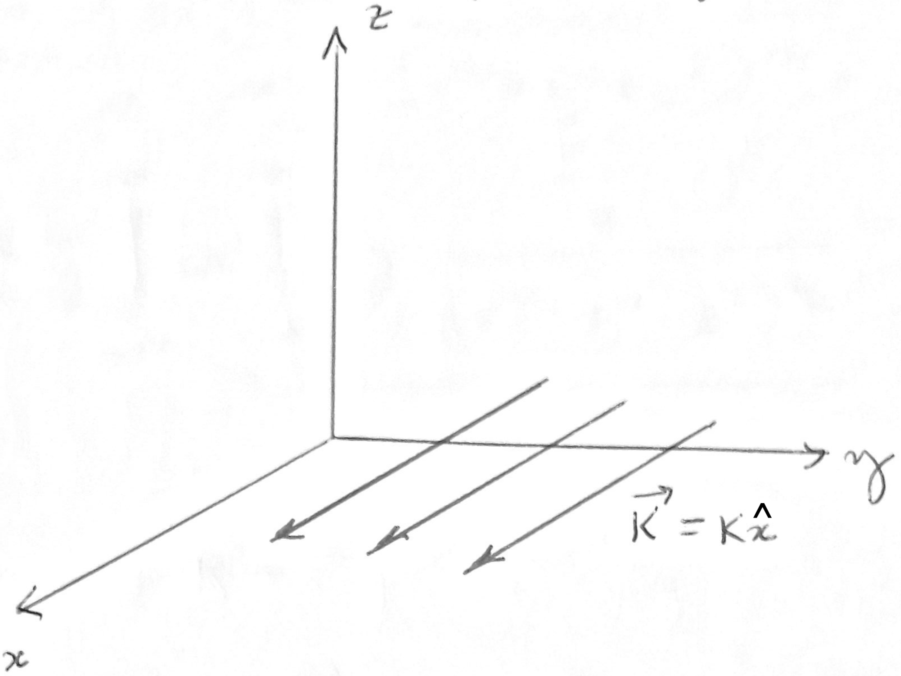
$$\oint_{P_3} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{P_3}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}\right)\left(ds\,\hat{s} + s\,d\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}\right)$$



$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_{P_3} d\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\int_A^B d\phi + \int_B^A d\phi\right\} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\phi_B - \phi_A + \phi_A - \phi_B\right\} = 0$$

Exemplo 2: densidade de corrente superficial uniforme $\vec{K} = K\hat{x}$ sobre o plano xy



Biot - Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K} \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\, da' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K} \times \vec{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^3}\, da'$$

$\vec{K} = K\hat{x}$

$\vec{r} = z\hat{z}$ sem perda de generalidade

$\vec{r}\,' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$

$$\vec{\mathscr{r}} = -x'\hat{x} - y'\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\mathscr{r}^3 = \left(x'^2 + y'^2 + z^2\right)^{3/2}$$

$$\vec{K} \times \vec{\mathscr{r}} = K\hat{x} \times \left(-x'\hat{x} - y'\hat{y} + z\hat{z}\right) = -Ky'\hat{z} - Kz\hat{y}$$

$\vec{B}$ não tem componente paralela a $\vec{K}$!

Então

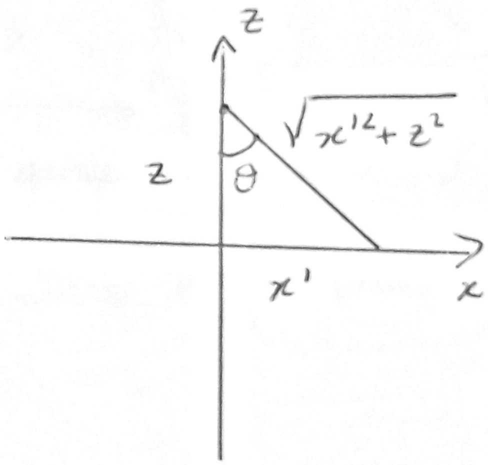
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{y'\hat{z} + z\hat{y}}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 K}{4\pi} \hat{y} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{z}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}}}_{= \frac{2z}{x'^2 + z^2}}$$

$\vec{B}$ só tem componente na direção $\hat{y}$

Então

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 K \hat{y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{x'^2 + z^2} dx'$$



Para $z > 0$:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 K \hat{y}}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = -\frac{\mu_0 K}{2} \hat{y}$$

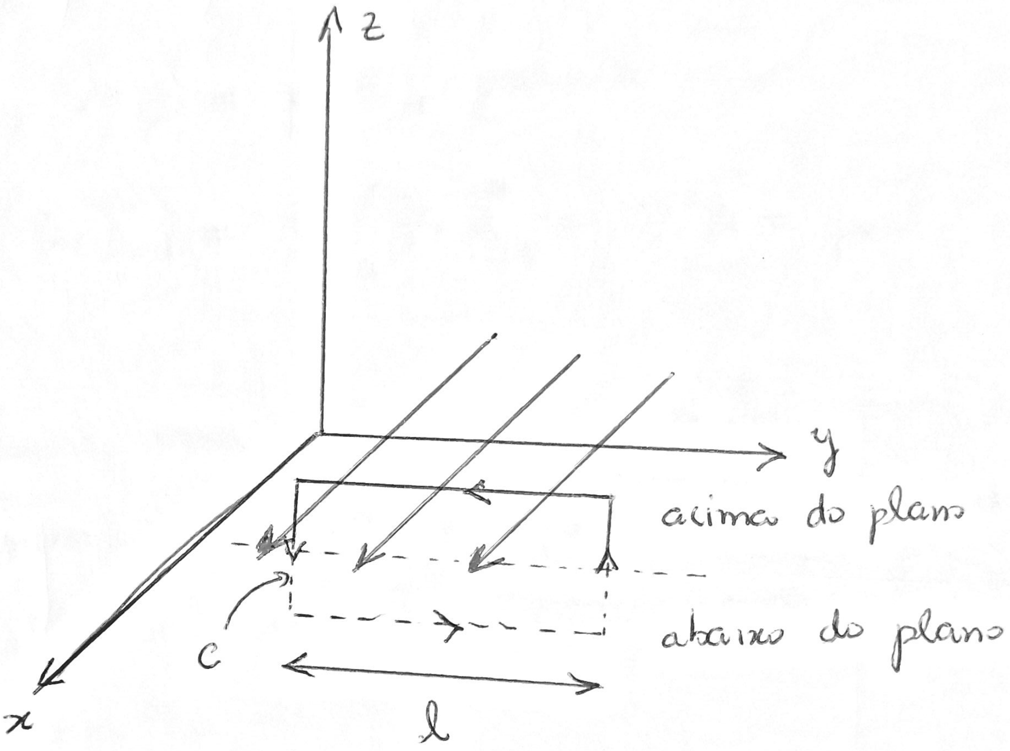
$$z > 0: \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x'^2 + z^2}}$$

$$z < 0: \cos\theta = \frac{-z}{\sqrt{x'^2 + z^2}}$$

Para $z < 0$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2\pi} \hat{y} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{\mu_0 K}{2} \hat{y}$$

Via lei de Ampère e usando o fato de que $\vec{B}$ só tem componente na direção $\hat{y}$ e que essa componente deve trocar de sinal ao cruzar o plano xy, temos



$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{acima} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{abaixo} \vec{B}\cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_l^0 (-B\hat{y})\cdot(dy\,\hat{y}) + \int_0^l (B\hat{y})\cdot(dy\,\hat{y})$$

$$= 2Bl = \mu_0 I = \mu_0 K l \Rightarrow B = \frac{\mu_0 K}{2}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{y}, & z > 0 \\ \dfrac{\mu_0 K}{2}\hat{y}, & z < 0 \end{cases}$$

Como $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, do teorema de Helmholtz $\vec{B}$ pode ser escrito como o rotacional de um campo vetorial

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \vec{A} = \text{potencial vetor}$$

Além disso, $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$, portanto

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}$$

Assim como havia uma ambiguidade (ou liberdade) na escolha do potencial escalar, pois qquer constante pode ser somada a V sem alterar $\vec{E}$, aqui também há uma liberdade na escolha de $\vec{A}$.

Como o rotacional de um gradiente é identicamente nulo, podemos sempre adicionar a $\vec{A}$ o gradiente de uma função escalar sem alterar $\vec{B}$.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\lambda)=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\cancelto{0}{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\lambda)}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$$

Uma escolha de $\vec{A}$ particularmente útil é quando

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Pergunta: é sempre possível encontrar uma função λ tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$?

Suponha que $\vec{A}_0$ é tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 \neq 0$

Criemos a partir de $\vec{A}_0$ um novo potencial $\vec{A}$ tal que

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla}\lambda$$

para alguma função escalar λ.

Então, se forçarmos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \nabla^2 \lambda = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2 \lambda = - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 \Longleftarrow$$

λ deve satisfazer uma eq. de Poisson!

Já conhecemos a solução geral via integração p/ a eq. de Poisson $\left(\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 \right)$

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0}{r} \, d\tau'$$

Para $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, $\vec{A}$ satisfaz também

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \Leftarrow \text{3 eqs de Poisson (uma para cada componente)}$$

E a solução geral via integração é então

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{\mathscr{r}} d\tau'$$