MAE 1512 - Estatística para Licenciatura II - 2º semestre de 2020

Gabarito da 1ª Lista de Exercícios

1) A distribuição dos pesos de homens adultos de certa população é normal com média 78 *kg* e desvio padrão 10 *kg*, e para as mulheres adultas dessa mesma população é normal com média 65 *kg* e desvio padrão 8 *kg*.

a) Qual é a porcentagem de homens com peso menor que 61 *kg*?
b) Qual é a porcentagem de mulheres com peso menor que 61 *kg*?
c) Se uma pessoa é sorteada de um grupo no qual o número de homens é o dobro do número de mulheres, qual é a porcentagem de pessoas que deverá pesar menos que 61 *kg*?

2) Um bom indicador do nível de intoxicação por benzeno é a quantidade de fenol encontrada na urina. A quantidade de fenol na urina de moradores de uma certa região segue, aproximadamente, uma distribuição normal de média 5 *mg/L* e desvio padrão 2 *mg/L*. Considere as seguintes definições em termos da variável quantidade de fenol na urina: Define-se como "valor de referência" a quantidade de fenol tal que 95% da população têm quantidade de fenol maior ou igual a esse valor; Uma pessoa é considerada "atípica" se a quantidade de fenol em sua urina for superior a 8*mg/L* ou inferior a 2 *mg/L*.

a) Sorteado um morador ao acaso, qual é a probabilidade de ser "atípico"?
b) Qual é o valor de referência da população?
c) Sorteadas 5 pessoas ao acaso, qual é a probabilidade se ter no mínimo 4 "atípicas"?
d) Sabendo que uma pessoa não é atípica, qual é a probabilidade de ter quantidade de fenol no intervalo 4*mg/L* a 6*mg/L*?

3) A capacidade máxima de um elevador é 500kg. Se a distribuição dos pesos de cada usuário é normal com média 70 e variância 100:

a) Qual é a probabilidade de sete passageiros ultrapassarem esse limite?
b) E seis passageiros?

4) Uma máquina de empacotar certo produto o faz segundo uma distribuição normal com média μ e desvio padrão 10g.

a) Em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos do que 500g?
b) Com a máquina assim regulada, programou-se uma carta de controle. De hora em hora, é retirada uma amostra de quatro pacotes que serão pesados. Se a média da amostra for inferior a 495 g ou superior a 520 g, para-se a produção para reajustar a máquina, ou seja, reajustar o peso médio. Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária?

5) O lucro diário de uma corretora de valores, em milhares de reais é dado por

$$L = 2\,L_A + 5\,L_I + 3\,L_C,$$

com L_A, L_I e L_C representando respectivamente os lucros diários nos setores de Agricultura, Indústria e Comércio. As distribuições de probabilidades dessas variáveis aleatórias são respectivamente L_A~N(3, 4), L_I~N(6, 9) e L_c ~N(4,16). Supondo independência entre esses três setores, calcule a probabilidade de um lucro diário acima de 50 mil.

Exercícios do livro *Noções de Probabilidade e Estatística - Magalhães e Lima (2015)*:

- Seção 6.2, exercícios 3 e 6
- Seção 6.3, exercícios 5, 13, 14, 22, 23, 29, 30 e 32.

No exercício 32 incluir o seguinte item:

e) Repita o item d) se forem comprados 100 pneus. Faça o cálculo exato e utilizando a aproximação da distribuição binomial pela normal e compare.

EXERCÍCIO 1

$\rightarrow$ (desvio padrão)^2

$*$ Homens: $H \sim N(78, 10^2)$

$*$ Mulheres: $M \sim N(65, 8^2)$

a) A porcentagem de homens adultos com peso menor que 61 Kg é dada por:

Média

$$\mathbb{P}(H < 61) = \mathbb{P}\left(Z_H < \frac{61-78}{10}\right) = \mathbb{P}(Z_H < -1{,}7) \;(*)\rightarrow$$ Transformamos para usar a Tabela Normal Padrão

$\hookrightarrow$ Desvio padrão

$$(*) = 0{,}5 - \mathbb{P}(-1{,}7 < Z_H < 0) = 0{,}5 - \mathbb{P}(0 < Z_H < 1{,}7)$$

$$= 0{,}5 - 0{,}45543 = 0{,}04457 = \mathbf{4{,}457\%} \;\blacksquare$$

$\hookrightarrow$ Valor da Tabela da Normal Padrão (0,1)

b) A porcentagem de mulheres com peso menor que 61 Kg é dada por:

$$\mathbb{P}(M < 61) = \mathbb{P}\left(Z_M < \frac{61-65}{8}\right) = \mathbb{P}(Z_M < -0{,}5)$$

$$= 0{,}5 - \mathbb{P}(-0{,}5 < Z_M < 0) = 0{,}5 - \mathbb{P}(0 < Z_M < 0{,}5)$$

$$= 0{,}5 - 0{,}19146 = 0{,}30854 = \mathbf{30{,}854\%} \;\blacksquare$$

c) Num grupo em que temos o dobro de homens, a população é escrita como:

$\rightarrow$ $2/3$ de homens e $1/3$ de mulheres.

Assim, a porcentagem de pessoas com menos de 61 Kg, considerando a configuração da população é dada por:

$$\frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(H < 61) + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(M < 61) = \frac{2 \cdot 0{,}04457 + 1 \cdot 0{,}30854}{3} = \mathbf{13{,}256\%}$$

$\blacksquare$

EXERCICIO 2

X = Quantidade de fenol de moradores de certa região

$$X \sim N(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Média}}}{5}, \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{Desvio padrão})^2 = \text{Variância}}}{2^2})$$

a) Uma pessoa é considerada "atípica" se X for superior a 8mg/L ou inferior a 2mg/L.

Assim, a probabilidade de um morador sorteado ao acaso ser "atípico" é dado por:

$$\mathbb{P}(X>8) + \mathbb{P}(X<2) = \mathbb{P}\left(Z_x > \frac{8-5}{2}\right) + \mathbb{P}\left(Z_x < \frac{2-5}{2}\right) =$$

$$\mathbb{P}(Z_x > 1{,}5) + \mathbb{P}(Z_x < -1{,}5) = 0{,}5 + \mathbb{P}(0 < Z_x < 1{,}5) +$$

$$0{,}5 - \mathbb{P}(-1{,}5 < Z_x < 0) = 1 - 2 \cdot \mathbb{P}(0 < Z_x < 1{,}5) =$$

$$1 - 2 \cdot 0{,}43319 = 0{,}13362 = \mathbf{13{,}362\%} \ \blacksquare$$

b) O "valor de referência" é a quantidade de fenol tal que 95% da população tem quantidade de X maior ou igual a esse valor.

Assim, o "valor de referência" da população é dado por:

$$\mathbb{P}(X \geq x) = 95\% \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z_x \geq \frac{x-5}{2}\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z_x < \frac{x-5}{2}\right) = 0{,}05$$

$$0{,}5 - \mathbb{P}\left(\frac{x-5}{2} < Z_x < 0\right) = 0{,}05 \Leftrightarrow -\mathbb{P}\left(\frac{x-5}{2} < Z_x < 0\right) = -0{,}45$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{x-5}{2} < Z_x < 0\right) = 0{,}45 \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(0 < Z_x < -\left(\frac{x-5}{2}\right)\right) = 0{,}45$$

$$-\left(\frac{x-5}{2}\right) = 1{,}64 \Leftrightarrow x-5 = -3{,}28 \Leftrightarrow \mathbf{x = 1{,}72\ mg/L} \ \blacksquare$$

EXERCÍCIO 2

c) Pelo item a), a probabilidade de uma pessoa ser atípica é de 0,13362. Assim, sorteando 5 pessoas ao acaso, podemos dizer que esse cenário pode ser descrito pela variável aleatória Y, tal que:

$$Y \sim Bin(n=5;\ p=0,13362)$$

Logo, para sabermos a probabilidade de termos, no mínimo 4 pessoas atípicas, podemos calcular

$$\mathbb{P}(Y \geq 4) = \mathbb{P}(Y=4) + \mathbb{P}(Y=5),$$

que são os cenários com 4 pessoas atípicas mais os cenários com 5 pessoas atípicas.

Agora, vamos lembrar que:

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Portanto,

$$(i)\ \mathbb{P}(Y=4) = \binom{5}{4} \cdot 0,13362^4 \cdot (1-0,13362)^1$$

$$= 5 \cdot 0,13362^4 \cdot 0,86638 = 0,001380907$$

$$(ii)\ \mathbb{P}(Y=5) = \binom{5}{5} \cdot 0,13362^5 \cdot (1-0,13362)^0$$

$$= 1 \cdot 0,13362^5 \cdot 1 = 0,0000425948 7 \to \text{Muito pequeno}$$

Assim, no mínimo 4 pessoas atípicas é dada por:

$$(i) + (ii) = 0,001380907 + 0,00004259487$$

$$= 0,001423502 \cong 0,1423\% \blacksquare$$

EXERCÍCIO 2

d) Uma pessoa não é atípica quando sua quantidade de fenol na urina está entre 2mg/L e 8 mg/L.

Com esse intervalo reduzido, a probabilidade de uma pessoa não atípica ter a quantidade de fenol no intervalo 4mg/L a 6mg/L é dado por:

Definido em a)

$$\frac{\mathbb{P}(4 < X < 6)}{\mathbb{P}(2 < X < 8)} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Probabilidade do intervalo 4 a 6} \\ \rightarrow \text{Probabilidade de não ser atípica} \end{array}$$

Assim,

$$\frac{\mathbb{P}(4<X<6)}{\mathbb{P}(2<X<8)} = \frac{\mathbb{P}\left(\frac{4-5}{2} < Z_X < \frac{6-5}{2}\right)}{\mathbb{P}\left(\frac{2-5}{2} < Z_X < \frac{8-5}{2}\right)} = \frac{\mathbb{P}(-0{,}5 < Z_X < 0{,}5)}{\mathbb{P}(-1{,}5 < Z_X < 1{,}5)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(-0{,}5 < Z_X < 0) + \mathbb{P}(0 < Z_X < 0{,}5)}{\mathbb{P}(-1{,}5 < Z_X < 0) + \mathbb{P}(0 < Z_X < 1{,}5)}$$

Propriedade da Normal ←

$$= \frac{\cancel{2} \cdot \mathbb{P}(0 < Z_X < 0{,}5)}{\cancel{2} \cdot \mathbb{P}(0 < Z_X < 1{,}5)} = \frac{\mathbb{P}(0 < Z_X < 0{,}5)}{\mathbb{P}(0 < Z_X < 1{,}5)}$$

$$= \frac{0{,}19146}{0{,}43319} = 0{,}441977 = 44{,}1977\%$$

Note que poderíamos utilizar a probabilidade do item a) e o cálculo seria:

$$\frac{\mathbb{P}(4 < X < 6)}{1 - 0{,}13362} = \frac{2 \cdot \mathbb{P}(0 < Z_X < 0{,}5)}{0{,}86638} = \frac{2 \cdot 0{,}1946}{0{,}86638}$$

$$= 0{,}441977 = 44{,}1977\% \blacksquare$$

EXERCÍCIO 3

a) O peso de cada usuário segue a distribuição:

$$X \sim N(70, 100)$$

Como a capacidade máxima do elevador é de 500 Kg, a probabilidade de sete passageiros ultrapassarem esse limite é calculada por:

$$W = \sum_{i=1}^{7} X_i \Rightarrow W \sim N(7.70 = 490; 7.100 = 700)$$

$$\mathbb{P}(W > 500) = \mathbb{P}\left(Z_w > \frac{500-490}{\sqrt{700}}\right) = \mathbb{P}\left(Z_w > \frac{10}{26{,}46}\right) \cong \mathbb{P}(Z_w > 0{,}38)$$

$$= 0{,}5 - \mathbb{P}(0 < Z_w < 0{,}38) = 0{,}5 - 0{,}14803$$

$$= 0{,}35197 = \mathbf{35{,}197\%} \blacksquare$$

b) Analogamente ao item a), a probabilidade de seis usuários ultrapassarem o limite é dado por:

$$W = \sum_{i=1}^{6} X_i \Rightarrow W \sim N(6.70 = 420; 6.100 = 600)$$

$$\mathbb{P}(W > 500) = \mathbb{P}\left(Z_w > \frac{500-420}{\sqrt{600}}\right) = \mathbb{P}\left(Z_w > \frac{80}{24{,}49}\right) \cong \mathbb{P}(Z_w > 3{,}27)$$

$$= 0{,}5 - \mathbb{P}(0 < Z_w < 3{,}27) = 0{,}5 - 0{,}49944$$

$$= 0{,}00056 = \mathbf{0{,}056\%} \blacksquare$$

EXERCÍCIO 4

A produção de uma máquina segue a distribuição abaixo:

$$X \sim N(\mu, 10^2)$$

a) Vamos descobrir em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos de 500g.

Em outras palavras, regulamos μ para que a probabilidade de a máquina produzir um pacote com menos de 500g seja de 10%. Logo, calculamos:

$$\mathbb{P}(X < 500) = 10\%$$

$$\mathbb{P}(X < 500) = 10\% = 0{,}1 \iff \mathbb{P}\left(Z_x < \frac{500-\mu}{10}\right) = 0{,}1 \iff$$

$$0{,}5 - \mathbb{P}\left(\frac{500-\mu}{10} < Z_x < 0\right) = 0{,}1 \underset{\text{Prop. da Normal}}{\iff} 0{,}5 - \mathbb{P}\left(0 < Z_x < -\left(\frac{500-\mu}{10}\right)\right) = 0{,}1$$

$$-\mathbb{P}\left(0 < Z_x < -\left(\frac{500-\mu}{10}\right)\right) = -0{,}4 \iff \mathbb{P}\left(0 < Z_x < -\left(\frac{500-\mu}{10}\right)\right) = 0{,}4$$

Da tabela da Normal Padrão, temos que:

$$-\left(\frac{500-\mu}{10}\right) = 1{,}28 \iff \frac{500-\mu}{10} = -1{,}28 \iff 500-\mu = -12{,}8 \iff \mu = 512{,}8g$$

b) Com a máquina assim regulada ($\mu = 512{,}8g$), vão ser retirados 4 pacotes e definida a média dos pesos dessa amostra. Se a média for inferior a 495g e superior a 520g, a produção é parada para se reajustar o peso médio. A média da amostra é definida por:

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i}{4} = \bar{X} \sim N\left(512{,}8;\ 10^2/4 \rightarrow \frac{\text{Variância}}{n}\right)$$

Como a máquina já está regulada, a probabilidade de termos uma parada desnecessária é dada por:

$$\mathbb{P}(\bar{X} < 495) + \mathbb{P}(\bar{X} > 520) = \mathbb{P}\left(Z_{\bar{x}} < \frac{495-512{,}8}{10/2}\right) + \mathbb{P}\left(Z_{\bar{x}} > \frac{520-512{,}8}{10/2}\right) = (*)$$

CONTINUA

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO 4

b) ⊛ $= \mathbb{P}(Z_{\bar{x}} < -3{,}56) + \mathbb{P}(Z_{\bar{x}} > 1{,}44)$

$$= 0{,}5 - \mathbb{P}(-3{,}56 < Z_{\bar{x}} < 0) + 0{,}5 - \mathbb{P}(0 < Z_{\bar{x}} < 1{,}44)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(0 < Z_{\bar{x}} < 3{,}56) - \mathbb{P}(0 < Z_{\bar{x}} < 1{,}44)$$

$$= 1 - 0{,}49981 - 0{,}42507 = 0{,}07512 = 7{,}512\% \ \blacksquare$$

EXERCÍCIO 5

O lucro diário é dado por

$$L = 2.L_A + 5.L_I + 3.L_C,$$

sendo:

→ Lucro da Agricultura: $L_A \sim N(3,4)$
→ Lucro da Indústria: $L_I \sim N(6,9)$
→ Lucro do Comércio: $L_C \sim N(4,16)$

Assim, podemos descrever o lucro diário com uma distribuição Normal que terá como média a $\mathbb{E}(L)$ e como variância a $VAR(L)$, que são dadas por:

$$\mathbb{E}(L) = \mathbb{E}(2.L_A + 5.L_I + 3.L_C) = \mathbb{E}(2.L_A) + \mathbb{E}(5.L_I) + \mathbb{E}(3.L_C)$$
$$= 2.\mathbb{E}(L_A) + 5.\mathbb{E}(L_I) + 3.\mathbb{E}(L_C) = 2.3 + 5.6 + 3.4 = 48$$

$$VAR(L) = VAR(2L_A + 5.L_I + 3.L_C) \overset{\text{Indep.}}{=} VAR(2.L_A) + VAR(5L_I) + VAR(3.L_C)$$
$$= 2^2.VAR(L_A) + 5^2.VAR(L_I) + 3^2.VAR(L_C)$$
$$= 4.4 + 25.9 + 9.16 = 385$$

Então, em milhares de reais, a distribuição do lucro diário é:

$$L \sim N(48, 385)$$

Logo, a probabilidade de um lucro diário acima de 50 mil é dada por:

$$\mathbb{P}(L > 50) = \mathbb{P}\left(Z_L > \frac{50-48}{\sqrt{385}}\right) \cong \mathbb{P}(Z_L > 0{,}10) = 0{,}5 - \mathbb{P}(0 < Z_L < 0{,}10)$$
$$= 0{,}5 - 0{,}03983 = 0{,}46017 \cong 46{,}017\% \ \blacksquare$$

EXERCICIO 3 DA SEÇÃO 6.2 DO LIVRO

Definindo como X o tempo, em minutos para o medicamento fazer efeito no paciente, temos que:

$$X \sim U(5,15)$$

a) A probabilidade da dor cessar em até 10 minutos é dada por:

$$\mathbb{P}(X \leq 10) = \mathbb{P}(5 \leq X \leq 10) = \int_5^{10} \frac{1}{15-5}\,dx = \int_5^{10} \frac{1}{10}\,dx = \frac{x}{10}\Big|_5^{10}$$

$$= \frac{10}{10} - \frac{5}{10} = \frac{5}{10} = 0,5 = 50\% \ ■$$

b) A probabilidade da dor demorar pelo menos 12 minutos é dada por:

$$\mathbb{P}(X > 12) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 12) = 1 - \mathbb{P}(5 \leq X \leq 12) = 1 - \int_5^{12} \frac{1}{15-5}\,dx$$

$$= 1 - \int_5^{12} \frac{1}{10}\,dx = 1 - \frac{x}{10}\Big|_5^{12} = 1 - \left(\frac{12}{10} - \frac{5}{10}\right) = 1 - \frac{7}{10}$$

$$= \frac{3}{10} = 30\% \ ■$$

c) A probabidade da durar mais de 7 minutos, sabendo-se que durou menos de 10 mimutos, é dada por:

$$\mathbb{P}(X > 7 \mid X < 10) = \frac{\mathbb{P}(X > 7 \cap X < 10)}{\mathbb{P}(X < 10)} = \frac{\mathbb{P}(7 < X < 10)}{\mathbb{P}(5 < X < 10)}$$

$$= \frac{\int_7^{10} \frac{1}{10}\,dx}{\int_5^{10} \frac{1}{10}\,dx} = \frac{\frac{10-7}{\cancel{10}}}{\frac{10-5}{\cancel{10}}} = \frac{3}{5} = 60\% \ ■$$

EXERCICIO 6 DA SEÇÃO 6.2 DO LIVRO

$$T \sim Exp(\alpha = 1/20)$$

$$\mathbb{P}(T > 15 \mid T > 10) = \frac{\mathbb{P}(T > 15 \cap T > 10)}{\mathbb{P}(T > 10)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T > 15)}{\mathbb{P}(T > 10)} = \frac{\int_{15}^{+\infty} \frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{1}{20}x} dx}{\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{1}{20}x} dx}$$

$$= \frac{-e^{-\frac{1}{20}x}\Big|_{15}^{+\infty}}{-e^{-\frac{1}{20}x}\Big|_{10}^{+\infty}} = \frac{e^{-\frac{1}{20} \cdot 15}}{e^{-\frac{1}{20} \cdot 10}} = e^{-\frac{1}{20}(15-10)}$$

$$= e^{-\frac{1}{20} \cdot 5} = e^{-1/4} \cong 0{,}7788 = 77{,}88\%$$

Note que é possível utilizar a propriedade da distribuição Exponencial de Perda de Memória,

$$\mathbb{P}(T \geq t+s \mid T \geq s) = \mathbb{P}(T \geq t+s-s) = \mathbb{P}(T \geq t),$$

em que, no nosso caso, $t = 5$ e $s = 10$:

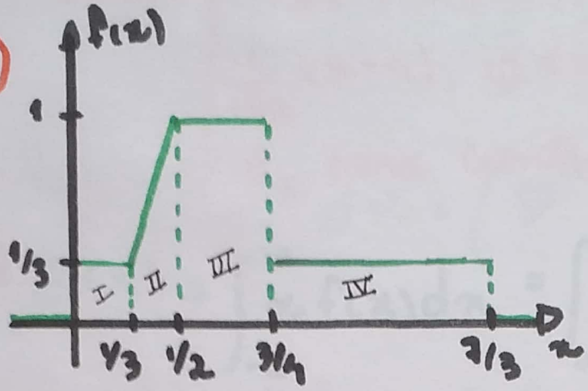
$$\mathbb{P}(T > t+s \mid T \geq s) = \mathbb{P}(T > 5+10 \mid T \geq 10) = \mathbb{P}(T \geq 5)$$

$$= e^{-\frac{1}{20} \cdot 5} = e^{-1/4} = 0{,}7788 = 77{,}88\%$$

Logo, com a distribuição Exponencial, o passado não importa, uma vez que, a probabilidade de ocorrência do evento no tempo t é a mesma da probabilidade de ocorrência do evento no tempo $t+s$ passado o tempo s. ■

Seção 6.3 - LIVRO

5)



a) Precisamos verificar se:

i) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \, (-\infty, \infty)$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

i) ✓

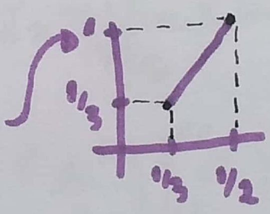
ii) Vamos calcular a soma das áreas $A = I + II + III + IV$

$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \qquad II = \frac{(b+B)}{2} \cdot h = \frac{(1/3 + 1)}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9} \qquad III = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$IV = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{28-9}{12}\right) = \frac{19}{36}$

$A = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{19}{36} = \frac{4+4+9+19}{36} = \frac{36}{36} = 1$ ✓

b) $f(x) = \begin{cases} 1/3, & 0 < x \leq 1/3 \\ 4x-1, & 1/3 < x \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 < x \leq 3/4 \\ 1/3, & 3/4 < x \leq 7/3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ *



$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = \left(\frac{1 - 1/3}{1/2 - 1/3}\right) \cdot (x - 1/2)$

$y - 1 = 4(x - 1/2)$

$y = 4x - 1$

c) $P(X < 5/12) = \int_{-\infty}^{5/12} f(x)\,dx = \int_{0}^{1/3} (1/3)\,dx + \int_{1/3}^{5/12} (4x-1)\,dx = \frac{1}{3}(x)\Big|_0^{1/3} + \left(4\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{1/3}^{5/12}$

$= 1/9 + 2\left(\frac{5}{12}\right)^2 - \frac{5}{12} - \left(2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{50}{144} + \frac{2}{9} - \frac{5}{12} = \frac{22}{144} = 0,1528$

d) Note que: $\int_0^{3/4} f(x)\,dx = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{17}{36}$ (soma das áreas I, II, III)

então queremos: $\int_{3/4}^{c} (1/3)\,dx = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{1}{3}(x)\Big|_{3/4}^{c} = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{c}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow c = \frac{30}{36}$

13) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}, & 0 \leq x \leq 12 \\ \frac{1}{192}(x-4), & 12 < x \leq 20 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

a) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{12} \frac{1}{24} x\,dx + \int_{12}^{20} \frac{1}{192}(x^2 - 4x)\,dx$

$= \frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{12} + \frac{1}{192}\left(\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{12}^{20} = 11,21\ cm$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{12} \frac{1}{24} x^2\,dx + \int_{12}^{20} \frac{1}{192}(x^3 - 4x^2)\,dx$

$= \frac{1}{24}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{12} + \frac{1}{192}\left(\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{12}^{20} = 161,78$

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 161,78 - (11,21)^2 = 36,1159\ cm^2$

b) $P(0 \leq X \leq 10) = \int_0^{10} \frac{1}{24}\,dx = \frac{1}{24}(x)\Big|_0^{10} = \frac{10}{24}$

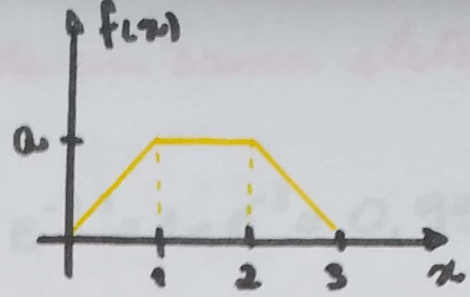
Y: preço dos fósseis

Y	100	200
$P(Y=y)$	$10/24$	$14/24$

$E(Y) = 100 \cdot \frac{10}{24} + 200 \cdot \frac{14}{24} = \frac{3800}{24}$

$E(Y) = 158,33$ reais

14) $f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1 \\ a, & 1 < x \leq 2 \\ -ax + 3a, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$



a) Precisamos que a área seja igual a 1.

Área $= \frac{1.a}{2} + 1.a + \frac{1.a}{2} = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2$

b) $P(X > 1,5) = \int_{1,5}^{\infty} f(x)dx = \int_{1,5}^{2} \left(\frac{1}{2}\right) dx + \int_{2}^{3} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx$

$= \frac{1}{2}(x)\Big|_{1,5}^{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{2}^{3} = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - (-1+3) = \frac{1}{2}$

Supondo que há independência entre as peças. Seja Y: número de peças com boa resistência, $Y \sim Bin(3; 0,5)$

$P(Y=1) = \frac{3!}{1!2!} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^2 = 3 \cdot 0,5^3 = \frac{3}{8}$

22) T: tempo de utilização de um caixa eletrônico

$T \sim Exp(3)$

a) $P(T<1) = P(0 \leq T < 1) = e^{-3.0} - e^{-3.1} = 1 - e^{-3} = 0,95$

b) $P(T>1 \mid T \leq 2) = \dfrac{P(1 < T \leq 2)}{P(0 \leq T \leq 2)} = \dfrac{e^{-3.1} - e^{-3.2}}{e^{-3.0} - e^{-3.2}} \cong \dfrac{0,047}{0,998} \cong 0,047$

c) $P(T \leq a) = 0,4 \Rightarrow P(0 \leq T \leq a) = 0,4 \Rightarrow e^{-3.0} - e^{-3.a} = 0,4$

$\Rightarrow 1 - e^{-3a} = 0,4 \Rightarrow e^{-3a} = 0,6 \Rightarrow \ln e^{-3a} = \ln 0,6$

$\Rightarrow -3a = \ln 0,6 \Rightarrow -3a = -0,51 \Rightarrow a = 0,17$ minutos

23) X: tempo necessário para eliminar o perigo de contaminação. $X \sim Exp(2)$ (em anos).

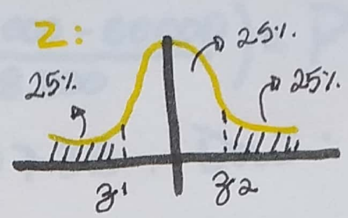
$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 2.e^{-2x}dx = e^{-2.0} - e^{-2.1} = 1 - e^{-2} = 0,8647$

$P(0 \leq X \leq 2) = \int_0^2 2.e^{-2x}dx = e^{-2.0} - e^{-2.2} = 1 - e^{-4} = 0,9817$

É bem seguro comer a fruta após 2 anos, pois é muito provável que ela não esteja contaminada.

29) X: peso (em Kg) $X \sim N(130, 20^2)$

$$Z = \frac{X - 130}{20}$$



$P(0 \leq Z \leq z_2) = 0,25 \Rightarrow z_2 = 0,67$

Note que $z_1 = -z_2$, pois Z é simetrica $\Rightarrow z_1 = -0,67$

$z_2 = \dfrac{x_2 - 130}{20} \Rightarrow 0,67 = \dfrac{x_2 - 130}{20} \Rightarrow x_2 = 143,4$ Kg ("obesos")

$z_1 = \dfrac{x_1 - 130}{20} \Rightarrow -0,67 = \dfrac{x_1 - 130}{20} \Rightarrow x_1 = 116,6$ Kg ("magros")

30) X: tempo para completar o teste $X \sim N(90, 20^2)$

a) $P(X < 80) = P\left(Z < \frac{80-90}{20}\right) = P(Z < -1/2) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 1/2)$

$= 0,3085 \rightarrow$ (probabilidade de passar)

Y: nº de candidatos que passam $Y \sim Bin(65, 0,3085)$

$E(Y) = n.p = 65 . 0,3085 = 20,5$. É esperado que 20 candidatos passem.

b) $P(X < t) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{t-90}{20}\right) = 0,05 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,5 - P\left(0 \leq Z < -\left(\frac{t-90}{20}\right)\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(0 \leq Z < -\left(\frac{t-90}{20}\right)\right) = 0,45$

$\Rightarrow \frac{t-90}{20} = -1,65 \Rightarrow t = 57$ minutos.

O candidato deve executar a prova em tempo inferior a 57 minutos.

32) D: durabilidade do pneu em Km. $D \sim N(60000, 8300^2)$

a) $P(D<48000) = P\left(Z < \frac{48000-60000}{8300}\right) = P(Z<-1,45)$

$= 0,5 - P(0 \leq Z \leq 1,45) = 0,0735$. Daí:

$0,0735 \cdot 100\% = 7,35\%$ dos pneus

b) $P(D<45000) = P\left(Z < \frac{45000-60000}{8300}\right) = P(Z<-1,81)$

$= 0,5 - P(0 \leq Z \leq 1,81) = 0,0351$. menos da metade da

$0,0351 \cdot 100\% = 3,51\%$. percentagem anterior

c) $P(D<d) = 0,02 \Rightarrow P\left(Z < \underbrace{\frac{d-60000}{8300}}_{d_0}\right) = 0,02 \Rightarrow$

$0,5 - P(0 \leq Z \leq -d_0) = 0,02 \Rightarrow P(0 \leq Z \leq -d_0) = 0,48$

$\Rightarrow d_0 = -2,05 \Rightarrow \frac{d-60000}{8300} = -2,05 \Rightarrow d = 42,985$ Km

d) Seja G o evento de usar a garantia em um pneu

$P(G) = 0,0351 \quad P(G^c) = 1 - 0,0351 = 0,9649$

EVENTO	PROB
$G^cG^cG^cG^c$	$(0,9649)^4 = 0,867$

A probabilidade de utilizar a garantia para um ou mais pneus é: $1 - P(G^cG^cG^cG^c)$

$= 1 - 0,867 = 0,133$

e) Seja Y: número de pneus que usaram a garantia

$Y \sim Bin(100; 0{,}0351)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\frac{100!}{0!\,100!} \cdot (0{,}0351)^0 \cdot (0{,}9649)^{100}\right)$$

$$= 1 - 0{,}0281 = 0{,}9719$$

Temos que $E(Y) = n.p = 100 . 0{,}0351 = 3{,}51$ e

$Var(Y) = n.p(1-p) = 100 . 0{,}0351 . 0{,}9649 = 3{,}39$

$\sigma(Y) = 1{,}84$

Seja $W \sim N(3{,}51; 3{,}39)$

$$P(Y \geq 1) \cong P(W \geq 0{,}5) = P\left(Z \geq \frac{0{,}5 - 3{,}51}{1{,}84}\right) = P(Z \geq -1{,}64)$$

$$= 0{,}5 + P(0 \leq Z \leq 1{,}64) = 0{,}5 + 0{,}4495 = 0{,}9495$$

Comparando:

$|P(Y \geq 1) - P(W \geq 0{,}5)| = 0{,}0224$