Aula de Exercícios

1) 2ª Provinha 2018

X - nota de Matemática dos alunos da escola

$E(X) = \mu \rightarrow$ nota média desses alunos

μ - desconhecida $\quad \hat{\mu} = \bar{X}$

$Var(X) = 2^2$ (desvio padrão conhecido)

Não foi especificada a distribuição de X $\Longrightarrow$

Usar o TLC

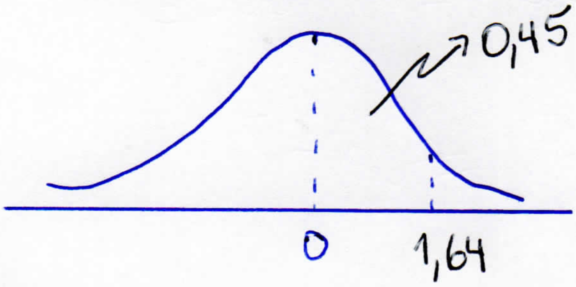
Usar Dimensionamento da Amostra

Pag 11 Aula 6/10

$$n = \frac{\sigma^2 z_\gamma^2}{\varepsilon^2}$$

No caso $\varepsilon = 0,5$

$\gamma = 0,90$



$z_\gamma = 1,64$

$\sigma^2 = 4$

$$n = \frac{4 \cdot 1,64^2}{0,5^2} = 43,03$$

Usar $n = 44$

2) Procedimento planejado para no máximo 10% itens defeituosos.

$n = 40$ mais de 15% defeituosas $\Rightarrow$ pára-se

P(parada desnecessária) = ?

p - proporção desconhecida de peças defeituosas na população de todas as peças

$\hat{p} = \dfrac{X}{40}$ X - nº de peças defeituosas na amostra de 40 peças

$\hat{p} > 0,15$ pára-se a produção

Parada desnecessária: $\hat{p} > 0,15$ quando $p = 0,10$

P(Parada desnecessária) = P($\hat{p} > 0,15$ quando $p = 0,10$) = *

Pelo TLC $\dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0,1)$

$\hookrightarrow$ distribuição aproximada de $\hat{p}$

Quando $p = 0,10$ $\dfrac{\hat{p} - 0,10}{\sqrt{\dfrac{0,1 \cdot 0,9}{40}}} \approx N(0,1)$

$$* = P(\hat{p} > 0{,}15 \text{ quando } p = 0{,}10) =$$

$$= P\left(\frac{\hat{p} - 0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{40}}} > \frac{0{,}15 - 0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{40}}}\right) \simeq P(Z > 1{,}05) =$$

$\hookrightarrow Z \sim N(0{,}1)$

$$= 0{,}5 - 0{,}3531 = 0{,}1469$$

Para amostra de tamanho $n = 60$

$$P(\hat{p} > 0{,}15 \text{ quando } p = 0{,}10) = P\left(\frac{\hat{p} - 0{,}10}{\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{60}}} > \frac{0{,}15 - 0{,}10}{\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{60}}}\right)$$

$$\simeq P(Z > 1{,}29) = 0{,}5 - 0{,}4015 = 0{,}0985$$

É uma probabilidade de erro, que diminuiu com o aumento do tamanho da amostra.

1) 2ª Provinha - 2019

X - tempo de emissão de estratos (em seg)

$X \sim Exp\left(\frac{1}{40}\right) \Rightarrow E(X) = 40 \quad Var(X) = 40^2$

$\begin{cases} \text{amostra aleatória } n = 50 \\ P(\text{tempo médio de emissão} < 30) = P(\bar{X} < 30) \end{cases}$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{50}$$

X_i - tempo de emissão do estrato do i-ésimo cliente

TLC: Para n grande $\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

No caso, $\mu = 40 \quad \sigma^2 = 40^2 \Rightarrow \bar{X} \approx N\left(40, \frac{40^2}{50}\right)$

$$P(\bar{X} < 30) = P\left(\frac{\bar{X} - 40}{40/\sqrt{50}} < \underbrace{\frac{30 - 40}{40/\sqrt{50}}}_{-1,77}\right) \simeq P(Z < -1,77)$$

$Z \sim N(0,1)$

$$\frac{\bar{X} - 40}{\frac{40}{\sqrt{50}}} \approx N(0,1)$$

$= P(Z > 1,77) = 0,5 - 0,4616$

$= 0,0384$

2) Pesquisa de Mercado para estimar p

p: proporção de pessoas que compram o sabonete B

a) Tamanho de amostra probabil/0,90

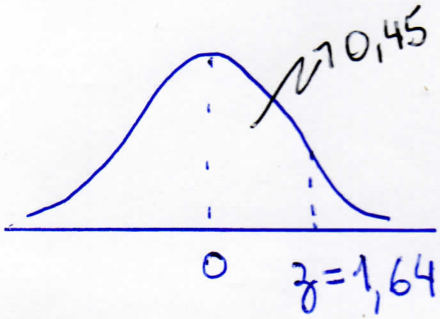
estimativa não se desvie de p por mais que 0,05

$n = ?$ $\quad \varepsilon = 0{,}05 \quad \gamma = 0{,}90$

$P(|\hat{p} - p| \leq 0{,}05) = 0{,}90$

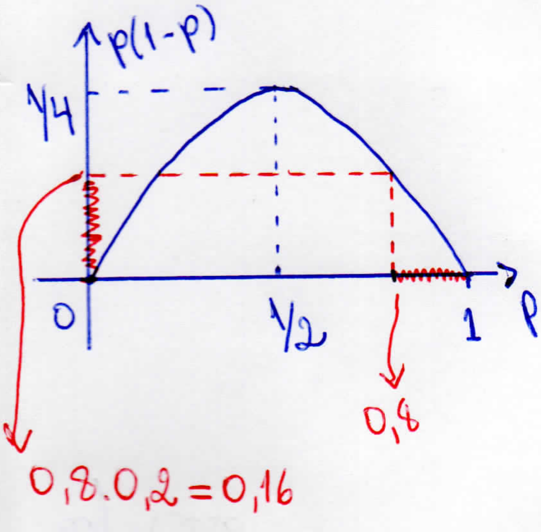
$\hat{p}$ = proporção amostral de pessoas que compram B

$$n = \underbrace{p(1-p)}_{\text{desconhecido}} \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 = 0{,}25\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2$$



$$n = \frac{1}{4}\left(\frac{1{,}64}{0{,}05}\right)^2 = 268{,}96 \simeq 269$$

b) Informação adicional $p > 0{,}8$, $n = ?$



$p > 0{,}8 \Rightarrow p(1-p) < 0{,}16$

Utiliza-se

$$n = 0{,}16\left(\frac{1{,}64}{0{,}05}\right)^2 = 172{,}13 \simeq 173$$

Redução: $269 - 173 = 96$

c) $n = 81$ Qual é o erro com prob/ 0,9 ?

$$n = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \qquad \gamma = 0{,}90 \Rightarrow z = 1{,}64$$

(o erro será maior que 0,05)

$$81 = \frac{1}{4}\left(\frac{1{,}64}{\varepsilon}\right)^2 \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2{,}6896}{81} = 0{,}0083$$

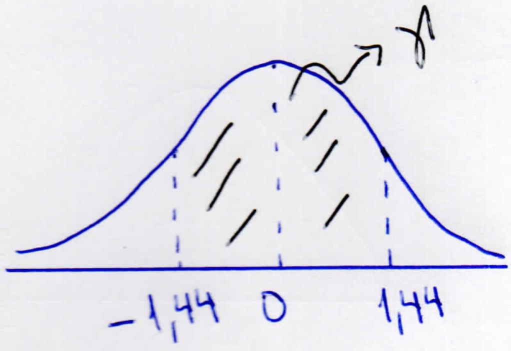
$$\varepsilon = \sqrt{0{,}0083} \simeq 0{,}09$$

d) $n = 81$ $P(\underbrace{|\hat{p} - p| \leq 0{,}08}_{\text{erro máximo} = 0{,}08}) = ?$ $\gamma = ?$

$\varepsilon = 0{,}08$

$$81 = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{0{,}08}\right)^2 \Rightarrow z^2 = 81 \cdot 4 \cdot (0{,}08)^2$$

$$z^2 = 2{,}0736 \qquad z = 1{,}44$$



$$P(0 < Z < 1{,}44) = 0{,}4251$$

$$\gamma = 2 \times 0{,}4251 = 0{,}8502$$

Menor que 0,90 p.q. erro menor (que 0,09) com mesmo tamanho de amostra.

Exercício 2 Seção 7.3 pag 243 Magalhães e Lima

D - nº de divórcios por adulto casado em uma comuni/

D	0	1	2	3
p_i	0,5	0,4	0,05	0,05

(D_1, D_2) amostra aleatória de dois indivíduos para estimar a média de divórcios $\mu = E(D)$

$\hat{\mu}_1 = \sqrt{D_1 D_2}$ $\hat{\mu}_2 = $ Máximo − Mínimo.

Obter a distribuição de probabilidades de $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$.

Verificar se são viciados.

$D_1 \backslash D_2$	0	1	2	3
0	0,25	0,20	0,025	0,025
1	0,20	0,16	0,020	0,020
2	0,025	0,020	0,0025	0,0025
3	0,025	0,020	0,0025	0,0025

Amostra aleatória $\Rightarrow$ D_1 e D_2 são independentes

$$P(D_1 = x, D_2 = y) = P(D_1 = x)\, P(D_2 = y) = P(D = x)\, P(D = y)$$

$D_1 \backslash D_2$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
2	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$
3	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	3

$\rightarrow$ Valores de $\sqrt{D_1 D_2}$ $= \hat{\mu}_1$

$$P(\hat{\mu}_1 = 0) = 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}025 + 0{,}025 + 0{,}20 + 0{,}025 + 0{,}025$$
$$= 0{,}75$$

$P(\hat{\mu}_1 = 1) = 0{,}16$ $\qquad$ $P(\hat{\mu}_2 = \sqrt{2}) = 0{,}020 + 0{,}020 = 0{,}04$

$$P(\hat{\mu}_1 = \sqrt{3}) = 0{,}020 + 0{,}\,0{,}020 = 0{,}040$$

$$P(\hat{\mu}_1 = \sqrt{6}) = 2 \times 0{,}0025 = 0{,}0050$$

$$P(\hat{\mu}_1 = 3) = 0{,}0025$$

$\hat{\mu}_1$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	3
p_i	0,75	0,16	0,04	0,04	0,005	0,0025

$$E(\hat{\mu}_1) = 0 \cdot 0{,}75 + 1 \cdot 0{,}16 + \sqrt{2} \cdot 0{,}04 + \sqrt{3} \cdot 0{,}04 + \sqrt{6} \cdot 0{,}005$$
$$+\ 3 \cdot 0{,}0025 = 0{,}31$$

De maneira análoga obtem-se a distribuição de $\hat{\mu}_2$ = Máximo - Mínimo

$\hat{\mu}_2$	0	1	2	3
p_i	0,415	0,445	0,090	0,050

$E(\hat{\mu}_2) = 0,775$

$$\mu = E(D) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,05$$
$$= 0,65$$

Supondo (hipoteticamente) que μ fosse desconhecido e utilizando $\hat{\mu}_1$ e $\hat{\mu}_2$ como estimadores de μ

$E(\hat{\mu}_1) = 0,31 \neq \mu$

$E(\hat{\mu}_2) = 0,775 \neq \mu$

Ambos são estimadores viciados de μ.

Como verificar a propriedade se não conhecemos μ?

Para estimadores "mais simples" é possível:

a) X v.a. $E(X) = \mu$

amostra $\begin{cases} \text{aleatória} \\ \text{casual} \end{cases}$ simples de tamanho n

Vimos que $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{n\mu}{n}$

$$= \mu$$

$\bar{X}$ é não viciado para μ.

Nas mesmas condições $\hat{\mu} = X_1$ é não viciado para μ pois $E(\hat{\mu}) = E(X_1) = \mu$

b) $\hat{p}$ - proporção amostral é não viciado para a proporção populacional p

$E(\hat{p}) = p$.

Ex 37 - Capítulo 11, Bussab e Morettin, pag 327

Suponha que X é uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$, com θ desconhecido.

Amostra aleatória $X_1, X_2 \dots X_n$.

Prove que $\bar{X}$ é um estimador viciado para θ.

Apresente um estimador não viciado para θ.

$X \sim U[0, \theta]$

Lembrando $X \sim U[a, b] \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$

No caso, $E(X) = \frac{\theta}{2}$

$$\therefore E(\bar{X}) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\Big[\overbrace{\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} + \dots \frac{\theta}{2}}^{n \text{ vezes}}\Big]$$

$$= \frac{1}{n} n \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$ $\bar{X}$ é viciado para θ

Seja $\hat{\theta} = 2\bar{X}$

$$E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

$\therefore \hat{\theta} = 2\bar{X}$ é um estimador não viciado para θ.