Gabarito do 8ª Práticas de demonstrações

Ferramentas disponíveis:

Definição 1: Uma transformação no plano π é uma função T: π → π que a cada ponto P∈π associa o ponto T(P)∈π chamado imagem de P por T.

Definição 2: Dizemos que as transformações T e L são iguais, e escrevemos T = L, quando T(P) = L(P) para todo ponto P.

Definição 3: Uma transformação T é uma transformação linear se

• T transforma uma soma de vetores na soma de suas imagens:
T($\vec{u}$ + $\vec{v}$) = T($\vec{u}$) + T($\vec{v}$), para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

• T transforma o múltiplo de um vetor no mesmo múltiplo da sua imagem:
T(λ $\vec{u}$) = λT($\vec{u}$), para todo vetor $\vec{u}$ e λ ∈ ℝ;

Definição 4: A rotação de ângulo θ em torno do ponto P_0 é a transformação $R_{\theta,P0}$: ℝ² → ℝ² que a cada ponto P do plano associa o ponto P' obtido pela rotação de ângulo θ, no sentido positivo, do ponto P em torno do ponto P_0.

Enunciados a demonstrar

Exemplo) Prove que uma transformação T: ℝ² → ℝ² é linear se, e somente se, existem números reais a, b, c e d tais que: T(x, y) = (ax + cy, bx + dy) , para todo (x, y) ∈ ℝ².

Demonstração:

Sejam a, b, c e d os números reais dados por

T($\vec{u}$) = T(1, 0) = (a, b) e T($\vec{v}$) = T(0, 1) = (c, d).

Se T é linear, então

T(x, y) = T($x\vec{u}$ + $y\vec{v}$) = xT($\vec{u}$) + yT($\vec{v}$) = x(a, b) + y(c, d) = (ax + cy, bx + dy),

para todo vetor (x, y) ∈ ℝ².

Se existem números reais a, b, c e d de modo que

T(x, y) = (ax + cy, bx + dy), para todo(x, y) ∈ ℝ²,

temos que pela **Definição 3** T é linear.

1) Prove que toda transformação linear leva retas em retas.

Demonstração:

Sejam T uma transformação linear,

r a reta paralela ao vetor $\vec{v}$ que passa pelo ponto P,

$\vec{v}$' = T($\vec{v}$) e P' = T(P), isto é, $\vec{OP'} = T(\vec{OP})$.

Afirmamos que T leva a reta r na reta r' que passa pelo ponto P' e é paralela ao vetor $\vec{v}'$.

Com efeito, um ponto Q pertence a r se, e só se, $\vec{PQ}'=t\vec{v}$, para algum t ∈ ℝ. Ou seja, $\vec{OQ}=\vec{OP}+t\vec{v}$.

Seja Q ∈ r arbitrário e seja Q' = t(Q).

Então, pela linearidade de T, temos:

$$\vec{OQ}'=T(\vec{OQ})=T(\vec{OP}+t\vec{v})=T(\vec{OP})+tT(\vec{v})=\vec{OP}'+t\vec{v}'$$.

Portanto, Q' pertence à reta r'.