

## Gabarito da 1ª Lista de Exercícios

1) A distribuição dos pesos de homens adultos de certa população é normal com média 78 kg e desvio padrão 10 kg, e para as mulheres adultas dessa mesma população é normal com média 65 kg e desvio padrão 8 kg.

- Qual é a porcentagem de homens com peso menor que 61 kg?
- Qual é a porcentagem de mulheres com peso menor que 61 kg?
- Se uma pessoa é sorteada de um grupo no qual o número de homens é o dobro do número de mulheres, qual é a porcentagem de pessoas que deverá pesar menos que 61 kg?

2) Um bom indicador do nível de intoxicação por benzeno é a quantidade de fenol encontrada na urina. A quantidade de fenol na urina de moradores de uma certa região segue, aproximadamente, uma distribuição normal de média 5 mg/L e desvio padrão 2 mg/L. Considere as seguintes definições em termos da variável quantidade de fenol na urina: Define-se como “valor de referência” a quantidade de fenol tal que 95% da população têm quantidade de fenol maior ou igual a esse valor; Uma pessoa é considerada “atípica” se a quantidade de fenol em sua urina for superior a 8mg/L ou inferior a 2 mg/L.

- Sorteado um morador ao acaso, qual é a probabilidade de ser “atípico”?
- Qual é o valor de referência da população?
- Sorteadas 5 pessoas ao acaso, qual é a probabilidade se ter no mínimo 4 “atípicas”?
- Sabendo que uma pessoa não é atípica, qual é a probabilidade de ter quantidade de fenol no intervalo 4mg/L a 6mg/L?

3) A capacidade máxima de um elevador é 500kg. Se a distribuição dos pesos de cada usuário é normal com média 70 e variância 100:

- Qual é a probabilidade de sete passageiros ultrapassarem esse limite?
- E seis passageiros?

4) Uma máquina de empacotar certo produto o faz segundo uma distribuição normal com média  $\mu$  e desvio padrão 10g.

- Em quanto deve ser regulado o peso médio  $\mu$  para que apenas 10% dos pacotes tenham menos de 500g?
- Com a máquina assim regulada, programou-se uma carta de controle. De hora em hora, é retirada uma amostra de quatro pacotes que serão pesados. Se a média da amostra for inferior a 495 g ou superior a 520 g, para-se a produção para reajustar a máquina, ou seja, reajustar o peso médio. Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária?

5) O lucro diário de uma corretora de valores, em milhares de reais é dado por

$$L = 2 L_A + 5 L_I + 3 L_C,$$

com  $L_A$ ,  $L_I$  e  $L_C$  representando respectivamente os lucros diários nos setores de Agricultura, Indústria e Comércio. As distribuições de probabilidades dessas variáveis aleatórias são respectivamente  $L_A \sim N(3, 4)$ ,  $L_I \sim N(6, 9)$  e  $L_C \sim N(4, 16)$ . Supondo independência entre esses três setores, calcule a probabilidade de um lucro diário acima de 50 mil.

Exercícios do livro *Noções de Probabilidade e Estatística - Magalhães e Lima (2015)*:

- Seção 6.2, exercícios 3 e 6
- Seção 6.3, exercícios 5, 13, 14, 22, 23, 29, 30 e 32.

No exercício 32 incluir o seguinte item:

e) Repita o item d) se forem comprados 100 pneus. Faça o cálculo exato e utilizando a aproximação da distribuição binomial pela normal e compare.

# EXERCÍCIO 1

\* Homens:  $H \sim N(78, 10^2)$   $\rightarrow$  (desvio padrão)<sup>2</sup>

\* Mulheres:  $M \sim N(65, 8^2)$

a) A porcentagem de homens adultos com peso menor que 61 Kg é dada por:

$$P(H < 61) = P\left(Z_H < \frac{61 - 78}{10}\right) = P(Z_H < -1,7) \rightarrow \text{Transformamos para usar a Tabela Normal Padrão}$$

*meia*  
 $\downarrow$   
Desvio padrão

$$\begin{aligned} * &= 0,5 - P(-1,7 < Z_H < 0) = 0,5 - P(0 < Z_H < 1,7) \\ &= 0,5 - 0,45543 = 0,04457 = 4,457\% \blacksquare \\ &\rightarrow \text{Valor da Tabela da Normal Padrão (0,1)} \end{aligned}$$

b) A porcentagem de mulheres com peso menor que 61 Kg é dada por:

$$\begin{aligned} P(M < 61) &= P\left(Z_M < \frac{61 - 65}{8}\right) = P(Z_M < -0,5) \\ &= 0,5 - P(-0,5 < Z_M < 0) = 0,5 - P(0 < Z_M < 0,5) \\ &= 0,5 - 0,19146 = 0,30854 = 30,854\% \blacksquare \end{aligned}$$

c) Num grupo em que temos o dobro de homens, a população é escrita como:

$\rightarrow$   $\frac{2}{3}$  de homens e  $\frac{1}{3}$  de mulheres.

Assim, a porcentagem de pessoas com menos de 61 Kg, considerando a configuração da população é dada por:

$$\frac{2}{3} \cdot P(H < 61) + \frac{1}{3} \cdot P(M < 61) = \frac{2 \cdot 0,04457 + 1 \cdot 0,30854}{3} = 13,256\% \blacksquare$$

## EXERCÍCIO 2

$X$  = Quantidade de fenol de moradores de certa região

$$X \sim N(5, 2^2)$$

↑ Média      √(Desvio padrão)<sup>2</sup> = Variância

a) Uma pessoa é considerada "atípica" se  $X$  for superior a 8mg/L ou inferior a 2mg/L.

Assim, a probabilidade de um morador sorteado ao acaso ser "atípico" é dado por:

$$P(X > 8) + P(X < 2) = P\left(Z_x > \frac{8-5}{2}\right) + P\left(Z_x < \frac{2-5}{2}\right) =$$

$$P(Z_x > 1,5) + P(Z_x < -1,5) = 0,5 + P(0 < Z_x < 1,5) +$$

$$0,5 - P(-1,5 < Z_x < 0) = 1 - 2 \cdot P(0 < Z_x < 1,5) =$$

$$1 - 2 \cdot 0,43319 = 0,13362 = 13,362\% \blacksquare$$

b) O "valor de referência" é a quantidade de fenol tal que 95% da população tem quantidade de  $X$  maior ou igual a esse valor.

Assim, o "valor de referência" da população é dado por:

$$P(X \geq x) = 95\% \Leftrightarrow P\left(Z_x \geq \frac{x-5}{2}\right) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(Z_x < \frac{x-5}{2}\right) = 0,05$$

$$0,5 - P\left(\frac{x-5}{2} < Z_x < 0\right) = 0,05 \Leftrightarrow -P\left(\frac{x-5}{2} < Z_x < 0\right) = -0,45$$

$$P\left(\frac{x-5}{2} < Z_x < 0\right) = 0,45 \Leftrightarrow P\left(0 < Z_x < -\left(\frac{x-5}{2}\right)\right) = 0,45$$

$$-\left(\frac{x-5}{2}\right) = 1,64 \Leftrightarrow x-5 = -3,28 \Leftrightarrow x = 1,72 \text{ mg/L} \blacksquare$$

## EXERCÍCIO 2

c) Pelo item a), a probabilidade de uma pessoa ser atípica é de 0,13362. Assim, sorteando 5 pessoas ao acaso, podemos dizer que esse cenário pode ser descrito pela variável aleatória  $Y$ , tal que:

$$Y \sim \text{Bin}(n=5; p=0,13362)$$

Logo, para sabermos a probabilidade de termos, no mínimo 4 pessoas atípicas, podemos calcular

$$\mathbb{P}(Y \geq 4) = \mathbb{P}(Y=4) + \mathbb{P}(Y=5),$$

que são os cenários com 4 pessoas atípicas mais os cenários com 5 pessoas atípicas.

Agora, vamos lembrar que:

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \mathbb{P}(Y=4) &= \binom{5}{4} \cdot 0,13362^4 \cdot (1-0,13362)^1 \\ &= 5 \cdot 0,13362^4 \cdot 0,86638 = 0,001380907 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \mathbb{P}(Y=5) &= \binom{5}{5} \cdot 0,13362^5 \cdot (1-0,13362)^0 \\ &= 1 \cdot 0,13362^5 \cdot 1 = 0,00004259487 \rightarrow \text{Muito pequeno} \end{aligned}$$

Assim, no mínimo 4 pessoas atípicas é dada por:

$$\begin{aligned} \text{(i)} + \text{(ii)} &= 0,001380907 + 0,00004259487 \\ &= 0,001423502 \cong 0,1423\% \quad \blacksquare \end{aligned}$$



## EXERCÍCIO 2

d) Uma pessoa não é atípica quando sua quantidade de fenol na urina está entre 2mg/L e 8mg/L.

Com esse intervalo reduzido, a probabilidade de uma pessoa não atípica ter a quantidade de fenol no intervalo 4mg/L a 6mg/L é dado por:

$$\frac{\mathbb{P}(4 < X < 6)}{\mathbb{P}(2 < X < 8)} \rightarrow \text{Probabilidade do intervalo 4 a 6}$$

$$\mathbb{P}(2 < X < 8) \rightarrow \text{Probabilidade de não ser atípica}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(4 < X < 6)}{\mathbb{P}(2 < X < 8)} &= \frac{\mathbb{P}\left(\frac{4-5}{2} < Z_x < \frac{6-5}{2}\right)}{\mathbb{P}\left(\frac{2-5}{2} < Z_x < \frac{8-5}{2}\right)} = \frac{\mathbb{P}(-0,5 < Z_x < 0,5)}{\mathbb{P}(-1,5 < Z_x < 1,5)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(-0,5 < Z_x < 0) + \mathbb{P}(0 < Z_x < 0,5)}{\mathbb{P}(-1,5 < Z_x < 0) + \mathbb{P}(0 < Z_x < 1,5)} \\ &\stackrel{\text{Propriedade da Normal}}{\leftarrow} = \frac{2 \cdot \mathbb{P}(0 < Z_x < 0,5)}{2 \cdot \mathbb{P}(0 < Z_x < 1,5)} = \frac{\mathbb{P}(0 < Z_x < 0,5)}{\mathbb{P}(0 < Z_x < 1,5)} \\ &= \frac{0,19146}{0,43319} = 0,441977 = 44,1977\% \end{aligned}$$

Note que poderíamos utilizar a probabilidade do item a) e o cálculo seria:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(4 < X < 6)}{1 - 0,13362} &= \frac{2 \cdot \mathbb{P}(0 < Z_x < 0,5)}{0,86638} = \frac{2 \cdot 0,19146}{0,86638} \\ &= 0,441977 = 44,1977\% \blacksquare \end{aligned}$$

### EXERCÍCIO 3

a) O peso de cada usuário segue a distribuição:

$$X \sim N(70, 100)$$

Como a capacidade máxima do elevador é de 500 Kg, a probabilidade de sete passageiros ultrapassarem esse limite é calculada por:

$$W = \sum_{i=1}^7 X_i \Rightarrow W \sim N(7 \cdot 70 = 490; 7 \cdot 100 = 700)$$

$$\begin{aligned} P(W > 500) &= P\left(Z_w > \frac{500 - 490}{\sqrt{700}}\right) = P\left(Z_w > \frac{10}{26,46}\right) \cong P(Z_w > 0,38) \\ &= 0,5 - P(0 < Z_w < 0,38) = 0,5 - 0,14803 \\ &= 0,35197 = 35,197\% \blacksquare \end{aligned}$$

b) Analogamente ao item a), a probabilidade de seis usuários ultrapassarem o limite é dado por:

$$W = \sum_{i=1}^6 X_i \Rightarrow W \sim N(6 \cdot 70 = 420; 6 \cdot 100 = 600)$$

$$\begin{aligned} P(W > 500) &= P\left(Z_w > \frac{500 - 420}{\sqrt{600}}\right) = P\left(Z_w > \frac{80}{24,49}\right) \cong P(Z_w > 3,27) \\ &= 0,5 - P(0 < Z_w < 3,27) = 0,5 - 0,99944 \\ &= 0,00056 = 0,056\% \blacksquare \end{aligned}$$

## EXERCÍCIO 4

A produção de uma máquina segue a distribuição abaixo:

$$X \sim N(\mu, 10^2)$$

- a) Vamos descobrir em quanto deve ser regulado o peso médio  $\mu$  para que apenas 10% dos pacotes tenham menos de 500g.  
Em outras palavras, regulamos  $\mu$  para que a probabilidade de a máquina produzir um pacote com menos de 500g seja de 10%. Logo, calculamos:

$$P(X < 500) = 10\%$$

$$P(X < 500) = 10\% = 0,1 \Leftrightarrow P\left(Z_x < \frac{500 - \mu}{10}\right) = 0,1 \Leftrightarrow$$

$$0,5 - P\left(\frac{500 - \mu}{10} < Z_x < 0\right) = 0,1 \Leftrightarrow 0,5 - \underbrace{P\left(0 < Z_x < -\left(\frac{500 - \mu}{10}\right)\right)}_{\substack{\text{Prop. da} \\ \text{Normal}}} = 0,1$$

$$-P\left(0 < Z_x < -\left(\frac{500 - \mu}{10}\right)\right) = -0,4 \Leftrightarrow P\left(0 < Z_x < -\left(\frac{500 - \mu}{10}\right)\right) = 0,4$$

Da tabela da Normal Padrão, temos que:

$$-\left(\frac{500 - \mu}{10}\right) = 1,28 \Leftrightarrow \frac{500 - \mu}{10} = -1,28 \Leftrightarrow 500 - \mu = -12,8 \Leftrightarrow \mu = 512,8g$$

- b) Com a máquina assim regulada ( $\mu = 512,8g$ ), vão ser retirados 4 pacotes e definida a média dos pesos dessa amostra. Se a média for inferior a 495g e superior a 520g, a produção é parada para se reajustar o peso médio. A média da amostra é definida por:

$$\frac{\sum_{i=1}^4 X_i}{4} = \bar{X} \sim N\left(512,8; \frac{10^2}{4} \rightarrow \frac{\text{Variança}}{n}\right)$$

Como a máquina já está regulada, a probabilidade de termos uma parada desnecessária é dada por:

$$P(\bar{X} < 495) + P(\bar{X} > 520) = P\left(Z_{\bar{X}} < \frac{495 - 512,8}{10/2}\right) + P\left(Z_{\bar{X}} > \frac{520 - 512,8}{10/2}\right) = *$$

**CONTINUA**

## CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO 4

$$\begin{aligned} b) \otimes &= P(Z_{\bar{x}} < -3,56) + P(Z_{\bar{x}} > 1,44) \\ &= 0,5 - P(-3,56 < Z_{\bar{x}} < 0) + 0,5 - P(0 < Z_{\bar{x}} < 1,44) \\ &= 1 - P(0 < Z_{\bar{x}} < 3,56) - P(0 < Z_{\bar{x}} < 1,44) \\ &= 1 - 0,49981 - 0,42507 = 0,07512 \approx 7,512\% \blacksquare \end{aligned}$$

## EXERCÍCIO 5

O lucro diário é dado por

$$L = 2 \cdot L_A + 5 \cdot L_I + 3 \cdot L_C,$$

sendo:

→ Lucro da Agricultura:  $L_A \sim N(3, 4)$

→ Lucro da Indústria:  $L_I \sim N(6, 9)$

→ Lucro do Comércio:  $L_C \sim N(4, 16)$

Assim, podemos descrever o lucro diário com uma distribuição Normal que terá como média a  $E(L)$  e como variância a  $VAR(L)$ , que são dadas por:

$$\begin{aligned} E(L) &= E(2 \cdot L_A + 5 \cdot L_I + 3 \cdot L_C) = E(2 \cdot L_A) + E(5 \cdot L_I) + E(3 \cdot L_C) \\ &= 2 \cdot E(L_A) + 5 \cdot E(L_I) + 3 \cdot E(L_C) = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VAR(L) &= VAR(2 \cdot L_A + 5 \cdot L_I + 3 \cdot L_C) \stackrel{\text{Independ.}}{=} VAR(2 \cdot L_A) + VAR(5 \cdot L_I) + VAR(3 \cdot L_C) \\ &= 2^2 \cdot VAR(L_A) + 5^2 \cdot VAR(L_I) + 3^2 \cdot VAR(L_C) \\ &= 4 \cdot 4 + 25 \cdot 9 + 9 \cdot 16 = 385 \end{aligned}$$

Então, em milhares de reais, a distribuição do lucro diário é:

$$L \sim N(48, 385)$$

Logo, a probabilidade de um lucro diário acima de 50 mil é dada por:

$$\begin{aligned} P(L > 50) &= P\left(Z_L > \frac{50 - 48}{\sqrt{385}}\right) \approx P(Z_L > 0,10) = 0,5 - P(0 < Z_L < 0,10) \\ &= 0,5 - 0,03983 = 0,46017 \approx 46,017\% \blacksquare \end{aligned}$$



### EXERCÍCIO 3 DA SEÇÃO 6.2 DO LIVRO

Definindo como  $X$  o tempo, em minutos para o medicamento fazer efeito no paciente, temos que:

$$X \sim U(5, 15)$$

a) A probabilidade da dor cessar em até 10 minutos é dada por:

$$\begin{aligned} P(X \leq 10) &= P(5 \leq X \leq 10) = \int_5^{10} \frac{1}{15-5} dx = \int_5^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{x}{10} \Big|_5^{10} \\ &= \frac{10}{10} - \frac{5}{10} = \frac{5}{10} = 0,5 = 50\% \blacksquare \end{aligned}$$

b) A probabilidade da dor demorar pelo menos 12 minutos é dada por:

$$\begin{aligned} P(X > 12) &= 1 - P(X \leq 12) = 1 - P(5 \leq X \leq 12) = 1 - \int_5^{12} \frac{1}{15-5} dx \\ &= 1 - \int_5^{12} \frac{1}{10} dx = 1 - \frac{x}{10} \Big|_5^{12} = 1 - \left( \frac{12}{10} - \frac{5}{10} \right) = 1 - \frac{7}{10} \\ &= \frac{3}{10} = 30\% \blacksquare \end{aligned}$$

c) A probabilidade da durar mais de 7 minutos, sabendo-se que durou menos de 10 minutos, é dada por:

$$\begin{aligned} P(X > 7 | X < 10) &= \frac{P(X > 7 \cap X < 10)}{P(X < 10)} = \frac{P(7 < X < 10)}{P(5 < X < 10)} \\ &= \frac{\int_7^{10} \frac{1}{10} dx}{\int_5^{10} \frac{1}{10} dx} = \frac{\frac{10-7}{10}}{\frac{10-5}{10}} = \frac{3}{5} = 60\% \blacksquare \end{aligned}$$

EXERCÍCIO 6 DA SEÇÃO 6.2 DO LIVRO

$$T \sim \text{Exp}(\lambda = 1/20)$$

$$P(T > 15 | T > 10) = \frac{P(T > 15 \cap T > 10)}{P(T > 10)}$$

$$= \frac{P(T > 15)}{P(T > 10)} = \frac{\int_{15}^{+\infty} \frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{1}{20}x} dx}{\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{20} \cdot e^{-\frac{1}{20}x} dx}$$

$$= \frac{-e^{-\frac{1}{20}x} \Big|_{15}^{+\infty}}{-e^{-\frac{1}{20}x} \Big|_{10}^{+\infty}} = \frac{e^{-\frac{1}{20} \cdot 15}}{e^{-\frac{1}{20} \cdot 10}} = e^{-\frac{1}{20} \cdot (15-10)}$$

$$= e^{-\frac{1}{20} \cdot 5} = e^{-1/4} = 0,7788 = 77,88\%$$

Note que é possível utilizar a propriedade da distribuição Exponencial de Perda de Memória,

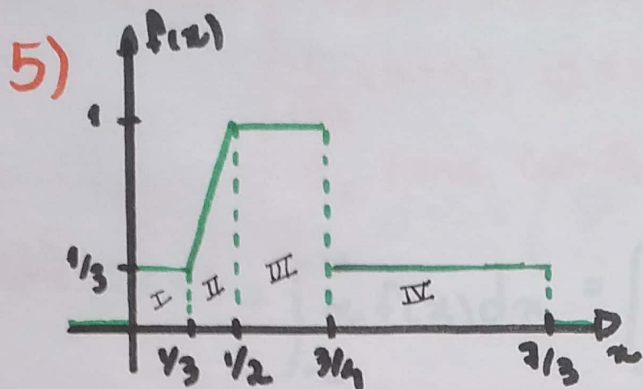
$$P(T > t+s | T > s) = P(T > t+s-s) = P(T > t),$$

em que, no nosso caso,  $t=5$  e  $s=10$ :

$$P(T > t+s | T > s) = P(T > 5+10 | T > 10) = P(T > 5) \\ = e^{-\frac{1}{20} \cdot 5} = e^{-1/4} = 0,7788 = 77,88\%$$

Logo, com a distribuição Exponencial, o passado não importa, uma vez que, a probabilidade de ocorrência do evento no tempo  $t$  é a mesma da probabilidade de ocorrência do evento no tempo  $t+s$  passado o tempo  $s$ . ■

## Seção 6.3 - LIVRO



a) Precisamos verificar se:

i)  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$

ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

i) ✓

ii) Vamos calcular a soma das áreas  $A = I + II + III + IV$

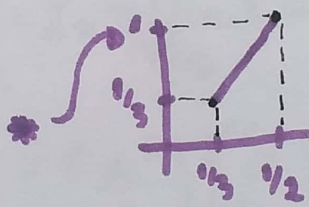
$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad II = \frac{(b+B) \cdot h}{2} = \frac{(\frac{1}{3} + 1) \cdot \frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{9} \quad III = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$IV = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{3} - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{28-9}{12} \right) = \frac{19}{36}$$

$$A = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{19}{36} = \frac{4 + 4 + 9 + 19}{36} = \frac{36}{36} = 1 \quad \checkmark$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 4x-1, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3}, & \frac{3}{4} < x \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = \left( \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \right) \cdot (x - \frac{1}{2})$$

$$y - 1 = 4(x - \frac{1}{2})$$

$$y = 4x - 1$$

c)

$$P(X < 5/12) = \int_{-\infty}^{5/12} f(x) dx = \int_0^{1/3} \frac{1}{3} dx + \int_{1/3}^{5/12} (4x-1) dx = \frac{1}{3}(x) \Big|_0^{1/3} + \left( 2x^2 - x \right) \Big|_{1/3}^{5/12}$$

$$= \frac{1}{9} + 2 \left( \frac{5}{12} \right)^2 - \frac{5}{12} - \left( 2 \left( \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{50}{144} + \frac{2}{9} - \frac{5}{12} = \frac{22}{144} = 0,1528$$

d) Note que:  $\int_0^{3/4} f(x) dx = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{17}{36}$  (soma das áreas I, II, III)

então queremos:  $\int_{3/4}^c \frac{1}{3} dx = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{1}{3}(x) \Big|_{3/4}^c = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{c}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$

$$\Rightarrow c = \frac{30}{36}$$



$$13) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}, & 0 \leq x \leq 12 \\ \frac{1}{192}(x-4), & 12 < x \leq 20 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$a) E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{12} \frac{1}{24} x dx + \int_{12}^{20} \frac{1}{192} (x^2 - 4x) dx$$

$$= \frac{1}{24} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{12} + \frac{1}{192} \left( \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{12}^{20} = 11,21 \text{ cm}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{12} \frac{1}{24} x^2 dx + \int_{12}^{20} \frac{1}{192} (x^3 - 4x^2) dx$$

$$= \frac{1}{24} \left( \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{12} + \frac{1}{192} \left( \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{12}^{20} = 161,78$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = 161,78 - (11,21)^2 = 36,1159 \text{ cm}^2$$

$$b) P(0 \leq X \leq 10) = \int_0^{10} \frac{1}{24} dx = \frac{1}{24} (x) \Big|_0^{10} = \frac{10}{24}$$

Y: peça das farras

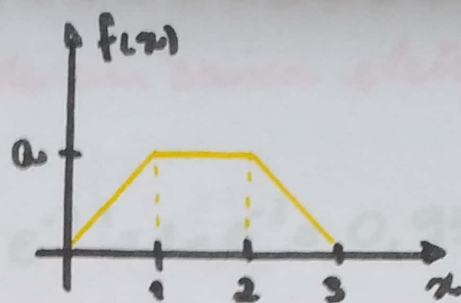
Y	100	200
P(Y=y)	$\frac{10}{24}$	$\frac{14}{24}$

$$E(Y) = 100 \cdot \frac{10}{24} + 200 \cdot \frac{14}{24} = \frac{3800}{24}$$

$$E(Y) = 158,33 \text{ reais}$$



$$14) f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1 \\ a, & 1 < x \leq 2 \\ -ax + 3a, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



a) Precisamos que a área seja igual a 1.

$$\text{Área} = \frac{1 \cdot a}{2} + 1 \cdot a + \frac{1 \cdot a}{2} = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b) P(X > 1,5) = \int_{1,5}^{\infty} f(x) dx = \int_{1,5}^2 \left(\frac{1}{2}\right) dx + \int_2^3 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}(x) \Big|_{1,5}^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + 3x\right) \Big|_2^3 = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - (-1 + 3) = \frac{1}{2}$$

Supondo que há independência entre as peças. Seja  $Y$ : número de peças com boa resistência,  $Y \sim \text{Bin}(3; 0,5)$

$$P(Y=1) = \frac{3!}{1!2!} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^2 = 3 \cdot 0,5^3 = \frac{3}{8}$$

22) T: tempo de utilização de um caixa eletrônico

$$T \sim \text{Exp}(3)$$

$$a) P(T < 1) = P(0 \leq T < 1) = e^{-3 \cdot 0} - e^{-3 \cdot 1} = 1 - e^{-3} = 0,95$$

$$b) P(T > 1 | T \leq 2) = \frac{P(1 < T \leq 2)}{P(0 \leq T \leq 2)} = \frac{e^{-3 \cdot 1} - e^{-3 \cdot 2}}{e^{-3 \cdot 0} - e^{-3 \cdot 2}} \approx \frac{0,047}{0,998} \approx 0,047$$

$$c) P(T \leq a) = 0,4 \Rightarrow P(0 \leq T \leq a) = 0,4 \Rightarrow e^{-3 \cdot 0} - e^{-3 \cdot a} = 0,4$$
$$\Rightarrow 1 - e^{-3a} = 0,4 \Rightarrow e^{-3a} = 0,6 \Rightarrow \ln e^{-3a} = \ln 0,6$$
$$\Rightarrow -3a = \ln 0,6 \Rightarrow -3a = -0,51 \Rightarrow a = 0,17 \text{ minutos}$$

23) X: tempo necessário para eliminar a periga de contaminação.  $X \sim \text{Exp}(2)$  (em anos).

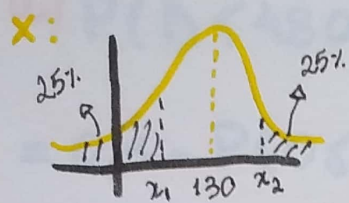
$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 2 \cdot e^{-2x} dx = e^{-2 \cdot 0} - e^{-2 \cdot 1} = 1 - e^{-2} = 0,8647$$

$$P(0 \leq X \leq 2) = \int_0^2 2 \cdot e^{-2x} dx = e^{-2 \cdot 0} - e^{-2 \cdot 2} = 1 - e^{-4} = 0,9817$$

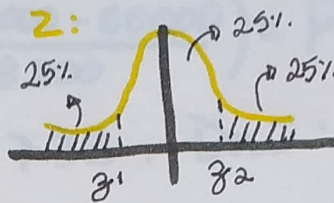
É bem segura comer a fruta após 2 anos, pois é muito provável que ela não esteja contaminada.



29)  $X$ : peso (em Kg)  $X \sim N(130, 20^2)$



$$Z = \frac{X - 130}{20}$$



$$P(0 \leq Z \leq z_2) = 0,25 \Rightarrow z_2 = 0,67$$

Note que  $z_1 = -z_2$ , pois  $Z$  é simétrica  $\Rightarrow z_1 = -0,67$

$$z_2 = \frac{x_2 - 130}{20} \Rightarrow 0,67 = \frac{x_2 - 130}{20} \Rightarrow x_2 = 143,4 \text{ Kg} \text{ ("obesos")}$$

$$z_1 = \frac{x_1 - 130}{20} \Rightarrow -0,67 = \frac{x_1 - 130}{20} \Rightarrow x_1 = 116,6 \text{ Kg} \text{ ("magros")}$$

30)  $X$ : tempo para completar o teste  $X \sim N(90, 20^2)$

$$a) P(X < 80) = P\left(Z < \frac{80-90}{20}\right) = P(Z < -1/2) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 1/2) \\ = 0,3085 \rightarrow (\text{probabilidade de passar})$$

$Y$ : n.º de candidatos que passam  $Y \sim \text{Bin}(65, 0,3085)$

$E(Y) = n \cdot p = 65 \cdot 0,3085 = 20,5$ . É esperada que 20 candidatas passem.

$$b) P(X < t) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{t-90}{20}\right) = 0,05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,5 - P\left(0 \leq Z < -\left(\frac{t-90}{20}\right)\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(0 \leq Z < -\left(\frac{t-90}{20}\right)\right) = 0,45$$

$$\Rightarrow \frac{t-90}{20} = -1,65 \Rightarrow t = 57 \text{ minutos.}$$

○ candidata deve executar a prova em tempo inferior a 57 minutos.



32) D: durabilidade do pneu em Km.  $D \sim N(60000, 8300^2)$

a)  $P(D < 48000) = P\left(Z < \frac{48000 - 60000}{8300}\right) = P(Z < -1,45)$

$= 0,5 - P(0 \leq Z \leq 1,45) = 0,0735$ . Daí:

$0,0735 \cdot 100\% = 7,35\%$  dos pneus

b)  $P(D < 45000) = P\left(Z < \frac{45000 - 60000}{8300}\right) = P(Z < -1,81)$

$= 0,5 - P(0 \leq Z \leq 1,81) = 0,0351$ .  $\rightarrow$  menor da metade da percentagem anterior  
 $0,0351 \cdot 100\% = 3,51\%$ .

c)  $P(D < d) = 0,02 \Rightarrow P\left(Z < \frac{d - 60000}{8300}\right) = 0,02 \Rightarrow$

$0,5 - P(0 \leq Z \leq -d_0) = 0,02 \Rightarrow P(0 \leq Z \leq -d_0) = 0,48$

$\Rightarrow d_0 = -2,05 \Rightarrow \frac{d - 60000}{8300} = -2,05 \Rightarrow d = 42,985 \text{ Km}$

d) Seja G o evento de usar a garantia em um pneu

$P(G) = 0,0351 \quad P(G^c) = 1 - 0,0351 = 0,9649$

EVENTO | PROB

$G^c G^c G^c G^c \mid (0,9649)^4 = 0,867$

A probabilidade de utilizar a garantia para um ou mais pneus é:  $1 - P(G^c G^c G^c G^c)$

$= 1 - 0,867 = 0,133$

e) Seja  $Y$ : número de pneus que usam a garantia

$$Y \sim \text{Bin}(100, 0,0351)$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y=0) = 1 - \left( \frac{100!}{0!100!} \cdot (0,0351)^0 \cdot (0,9649)^{100} \right) \\ &= 1 - 0,0281 = 0,9719 \end{aligned}$$

Temos que  $E(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0,0351 = 3,51$  e

$$\text{Var}(Y) = n \cdot p(1-p) = 100 \cdot 0,0351 \cdot 0,9649 = 3,39$$

Seja  $W \sim N(3,51; 3,39)$   $\sigma(Y) = 1,84$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &\approx P(W \geq 0,5) = P\left(Z \geq \frac{0,5 - 3,51}{1,84}\right) = P(Z \geq -1,64) \\ &= 0,5 + P(0 \leq Z \leq 1,64) = 0,5 + 0,4495 = 0,9495 \end{aligned}$$

Comparando:

$$|P(Y \geq 1) - P(W \geq 0,5)| = 0,0224$$