Lista 3

Nícolas André da Costa Morazotti

9 de outubro de 2020

Questão 1

Uma fonte produz radiação eletromagnética monocromática que se propaga na direção $\hat{x}$ de um sistema cartesiano. A frequência da radiação é $f = 3GHz$, e o campo elétrico máximo é $1V/m$. Admitindo que o campo elétrico esteja na direção $\hat{y}$, encontre a expressão matemática para os campos elétrico e magnético, em função da posição e do tempo.

Para tal campo, escrevemos $\omega = 2\pi f$ e $\omega = ck \to k = \omega/c = 2\pi f/c$. Sabemos que a onda se propaga em $\hat{x}$, que implica em $\mathbf{k} = \hat{x}2\pi f/c$. Além disso, $\mathbf{E}_0 = \hat{y}1V/m$. Isso nos dá uma expressão para o campo elétrico de

$$\mathbf{E} = \hat{y}\cos\left(\frac{2\pi f}{c}x - 2\pi f t\right) \tag{1}$$

$$= \hat{y}\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^9}{3\cdot 10^8}x - 2\pi\cdot 3\cdot 10^9 t\right) \tag{2}$$

$$= \hat{y}\cos\left(20\pi x - 6\pi\cdot 10^9 t\right) \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Para obter $\mathbf{B}$, podemos lançar mão da lei de Faraday

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right) \tag{6}$$

$$= \hat{z}\frac{\partial}{\partial x}E_y \tag{7}$$

$$= -\hat{z}\frac{2\pi f}{c}\sin\left(\frac{2\pi f}{c}x - 2\pi f t\right). \tag{8}$$

Ao integrarmos a equação 8 no tempo, obtemos $\mathbf{B}$ da forma

$$-\mathbf{B} = -\hat{z}\frac{2\pi f}{c}\int dt\sin\left(\frac{2\pi f}{c}x - 2\pi f t\right) \tag{9}$$

$$= -\hat{z}\frac{2\pi f}{c}\left(-\frac{1}{2\pi f}\right)\int du\sin u \tag{10}$$

$$= -\hat{z}\frac{1}{c}\cos\left(\frac{2\pi f}{c}x - 2\pi f t\right) \tag{11}$$

$$\mathbf{B} = \hat{z}\frac{1}{c}\cos\left(\frac{2\pi f}{c}x - 2\pi f t\right). \tag{12}$$

Questão 2

O campo elétrico de uma onda eletromagnética monocromática é dado pela equação

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t\right), \tag{13}$$

onde os vetores $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{k}$ e a frequência ω são constantes. Encontre

1. $\nabla\cdot\mathbf{E}$;
2. $\nabla\times\mathbf{E}$;

O divergente e o rotacional de $\mathbf{E}$ podem ser calculados facilmente lançando mão de notação indicial:

$$\mathbf{E} = \sum_j \hat{x}_j E_{0j} \cos\left(\sum_n k_n x_n - \omega t\right). \tag{14}$$

O divergente de E é, então,

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \sum_j E_{0j} \frac{\partial \cos\left(\sum_n k_n x_n - \omega t\right)}{\partial x_j}. \tag{15}$$

Vou expandir primeiro a soma interna e depois a externa, e por fim analisaremos sem necessariamente abrir toda a soma.

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E} &= \sum_j E_{0j} \frac{\partial \cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial x_j} & (16)\\
&= E_{0x} \frac{\partial \cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial x} \\
&+ E_{0y} \frac{\partial \cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial y} \\
&+ E_{0z} \frac{\partial \cos\left(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t\right)}{\partial z} & (17)\\
&= \left(k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}\right)\left[-\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right] & (18)\\
&= -\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t). & (19)
\end{aligned}$$

A maneira alternativa seria:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \sum_j E_{0j} \frac{\partial \cos\left(\sum_n k_n x_n - \omega t\right)}{\partial x_j}. \tag{20}$$

Veja que a derivada só deriva o cosseno no argumento em que $j = n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E} &= -\sum_j k_j E_{0j} \sin\left(\sum_n k_n x_n - \omega t\right) & (21)\\
&= -\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 \sin\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t\right). & (22)
\end{aligned}$$

O que esse resultado representa para nós? Ora, uma vez que sabemos que no vácuo a onda se propaga ortogonalmente em relação aos seus campos, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E_0} = 0 = \nabla\cdot\mathbf{E}$.

Expandindo o rotacional,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right) \tag{23}$$

$$= \hat{x}\left[\frac{\partial \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}{\partial y}E_{0z} - \frac{\partial \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}{\partial z}E_{0y}\right] \tag{24}$$

$$+ \hat{y}\left[\frac{\partial \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}{\partial z}E_{0x} - \frac{\partial \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}{\partial x}E_{0z}\right] \tag{25}$$

$$+ \hat{z}\left[\frac{\partial \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}{\partial x}E_{0y} - \frac{\partial \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}{\partial y}E_{0x}\right] \tag{26}$$

$$= -\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)[\hat{x}\left(k_y E_{0z} - k_z E_{0y}\right) + \hat{y}\left(k_y E_{0x} - k_z E_{0z}\right) + \hat{z}\left(k_y E_{0y} - k_z E_{0x}\right)] \tag{27}$$

$$= -\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t). \tag{28}$$

Utilizando o símbolo de Levi-Civita, podemos obter o mesmo resultado

$$\nabla \times \mathbf{E} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\hat{e}_i \partial_j E_k \tag{29}$$

$$= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\hat{e}_i \partial_j \left[\cos\left(\sum_n k_n x_n - \omega t\right)\right] E_{0k} \tag{30}$$

$$= -\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\hat{e}_i k_j \left[\sin\left(\sum_n k_n x_n - \omega t\right)\right] E_{0k} \tag{31}$$

$$= -\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\hat{e}_i k_j E_{0,k} \tag{32}$$

$$= -\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0. \tag{33}$$

Questão 3

O campo elétrico de uma onda monocromática tem a expressão

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \cos\left[2\pi(3x + 4y) - \omega t\right]\hat{z}, \tag{34}$$

no sistema internacional. Encontre

1. A frequência ω;
2. O comprimento de onda λ;
3. O campo magnético, em função da posição e do tempo.

Para encontrar a frequência, usamos $\omega = ck$, onde $k = ||\mathbf{k}||$. Para encontrar o vetor $\mathbf{k}$, usamos o fato que

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = 2\pi(3x+4y) \tag{35}$$
$$k_x = 6\pi \tag{36}$$
$$k_y = 8\pi \tag{37}$$
$$k_z = 0 \tag{38}$$
$$||\mathbf{k}|| = \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} \tag{39}$$
$$= \sqrt{100\pi^2} \tag{40}$$
$$= 10\pi \tag{41}$$
$$\omega = 10\pi c \approx 9.4\cdot 10^9\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}. \tag{42}$$

O comprimento de onda pode ser calculado pela relação $||\mathbf{k}|| = 2\pi/\lambda$. Assim, $\lambda = 0.2m$ (pois estamos em unidades internacionais).

Por fim, precisamos obter o campo magnético. Para isso, vamos usar o resultado para $\nabla\times\mathbf{E}$ encontrado no último exercício:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \sin\left[2\pi(3x+4y)-10\pi ct\right](6\pi\hat{x}+8\pi\hat{y})\times\hat{z} \tag{43}$$
$$= \sin\left[2\pi(3x+4y)-10\pi ct\right](-6\pi\hat{y}+8\pi\hat{x}). \tag{44}$$

Integrando no tempo, temos

$$\mathbf{B} = \frac{(-3\hat{y}+4\hat{x})}{5c}\cos\left[2\pi(3x+4y)-10\pi ct\right] \tag{45}$$
$$= \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}}{\omega} \tag{46}$$
$$= \frac{\hat{k}\times\mathbf{E}}{c}. \tag{47}$$

Questão 4

O campo magnético de uma onda monocromática é dado, no sistema internacional, pela expressão

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0\cos\left[\pi(x+2y+2z-3ct)\right]. \tag{48}$$

Sabe-se que $\mathbf{B}_0$ está no plano xy e tem módulo unitário. Calcule $\nabla\cdot\mathbf{B}$ e, a partir do resultado, encontre o vetor $\mathbf{B}_0$.

Para encontrar o divergente, vamos primeiro encontrar $\mathbf{k}$.

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \pi(x+2y+2z) \tag{49}$$
$$k_x = \pi \tag{50}$$
$$k_y = 2\pi \tag{51}$$
$$k_z = 2\pi. \tag{52}$$

Como não há nada de único no campo elétrico do exercício em relação ao magnético (em termos algébricos), podemos utilizar o resultado de $\nabla\cdot\mathbf{E}$ para o campo magnético, e obtemos

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0\sin[\pi(x+2y+2z-3ct)] \equiv 0. \tag{53}$$

Como sabemos que $\mathbf{B}_0$ está no plano xy, então $\mathbf{B}_0 = B_{0x}\hat{x} + B_{0y}\hat{y}$. O produto interno

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \tag{54}$$
$$= \pi B_{0x} + 2\pi B_{0y} \tag{55}$$
$$B_{0x} = -2B_{0y}. \tag{56}$$

Usando agora que $\mathbf{B}_0$ tem módulo unitário, temos

$$\sqrt{4B_{0y}^2 + B_{0y}^2} = 1 \tag{57}$$
$$B_{0y} = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{58}$$
$$\mathbf{B}_0 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{y}. \tag{59}$$

Questão 5

Encontre o campo elétrico correspondente ao campo magnético da questão 4 e compare $\hat{k} \times \mathbf{E}$ com $\mathbf{B}$.

Para encontrar o campo elétrico, lançamos mão da lei de Ampère-Maxwell no vácuo

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{60}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = -\sin[\pi(x + 2y + 2z - 3ct)]\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0, \tag{61}$$

com

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = \frac{\pi}{\sqrt{5}}(\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}) \times (-2\hat{x} + \hat{y}) \tag{62}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}}(\hat{z} + 4\hat{z} - 4\hat{y} - 2\hat{x}) \tag{63}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}}(5\hat{z} - 4\hat{y} - 2\hat{x}) \tag{64}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\pi}{\sqrt{5}}(5\hat{z} - 4\hat{y} - 2\hat{x})\sin[\pi(x + 2y + 2z - 3ct)] \tag{65}$$
$$\mathbf{E} = -\frac{\pi c^2}{\sqrt{5}}(5\hat{z} - 4\hat{y} - 2\hat{x})\int dt \sin[\pi(x + 2y + 2z - 3ct)] \tag{66}$$
$$= -\frac{\pi c^2}{3\pi c\sqrt{5}}(5\hat{z} - 4\hat{y} - 2\hat{x})\cos[\pi(x + 2y + 2z - 3ct)] \tag{67}$$
$$= -\frac{c}{3\sqrt{5}}(5\hat{z} - 4\hat{y} - 2\hat{x})\cos[\pi(x + 2y + 2z - 3ct)]. \tag{68}$$

Podemos escrever $\hat{k} = (\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z})/3$. Se calcularmos $\hat{k} \times \mathbf{E}$, temos

$$\hat{k} \times \mathbf{E} = -\frac{c}{3\sqrt{5}}\hat{k} \times (5\hat{z} - 4\hat{y} - 2\hat{x})\cos[\pi(x + 2y + 2z - 3ct)] \tag{69}$$
$$= -\frac{c}{3\sqrt{5}}\frac{1}{3}(\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}) \times (5\hat{z} - 4\hat{y} - 2\hat{x})\cos[\pi(x + 2y + 2z - 3ct)] \tag{70}$$
$$= -\frac{c}{9\sqrt{5}}(18\hat{x} - 9\hat{y})\cos[\pi(x + 2y + 2z - 3ct)]. \tag{71}$$

Podemos simplificar tal expressão para

$$\hat{k} \times \mathbf{E} = -\frac{c}{\sqrt{5}}(2\hat{x} - \hat{y}) \cos[\pi(x + 2y + 2z - 3ct)] \tag{72}$$

$$= c\mathbf{B}. \tag{73}$$

Questão 6

Os campos elétricos de duas ondas são dados pelas expressões

$$\mathbf{E}_1 = \cos\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t\right) \hat{z} \tag{74}$$

e

$$\mathbf{E}_2 = \cos\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t\right) \hat{z}, \tag{75}$$

onde $\mathbf{k} = 2\pi\hat{x}$ e $\omega = 2\pi c$. Encontre o campo elétrico resultante da soma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

Podemos reescrever as duas ondas como

$$\mathbf{E}_1 = \cos(2\pi x - 2\pi ct)\hat{z} \tag{76}$$

$$\mathbf{E}_2 = \cos(2\pi x + 2\pi ct)\hat{z} \tag{77}$$

$$\mathbf{E} = \hat{z}\left[\cos(2\pi x - 2\pi ct) + \cos(2\pi x + 2\pi ct)\right], \tag{78}$$

Utilizando a fórmula de Prostaférese para os cossenos, podemos expandir

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \tag{79}$$

$$\cos(2\pi x - 2\pi ct) + \cos(2\pi x + 2\pi ct) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi ct) - \sin(2\pi x)\sin(2\pi ct) \tag{80}$$

$$+ \cos(2\pi x)\cos(2\pi ct) + \sin(2\pi x)\sin(2\pi ct) \tag{81}$$

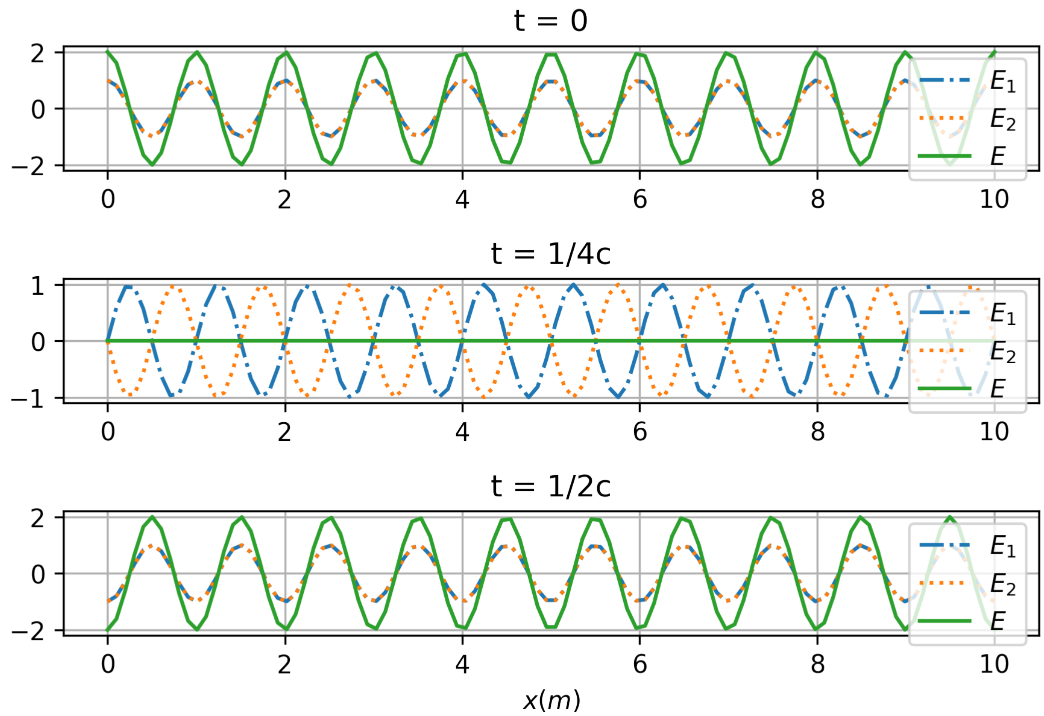
$$= 2\cos(2\pi x)\cos(2\pi ct) \tag{82}$$

$$\mathbf{E} = 2\cos(2\pi x)\cos(2\pi ct)\hat{z}. \tag{83}$$

Questão 7

Para o campo $\mathbf{E}$ encontrado na questão 6, esboce em gráfico o campo em função de x para

1. $t = 0$.
2. $t = 1/(4c)$.
3. $t = 1/(2c)$.



Questão 8

Encontre o campo magnético correspondente ao campo $\mathbf{E}$ encontrado na questão 6.

Tomando o rotacional de $\mathbf{E}$,

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right) \tag{84}$$

$$= -\hat{y}\frac{\partial}{\partial x}E_z \tag{85}$$

$$= 4\pi \sin(2\pi x)\cos(2\pi ct)\hat{y} \tag{86}$$

$$\mathbf{B} = -\hat{y}4\pi \sin(2\pi x)\int dt \cos(2\pi ct) \tag{87}$$

$$= -\hat{y}\frac{4\pi}{2\pi c}\sin(2\pi x)\sin(2\pi ct) \tag{88}$$

$$= -\hat{y}\frac{2}{c}\sin(2\pi x)\sin(2\pi ct). \tag{89}$$

Questão 9

Dada uma onda eletromagnética, define-se o *vetor de Poynting* $\mathbf{S}$ pela igualdade

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \tag{90}$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Encontre o vetor de Poynting para o campo da questão 3.

O campo elétrico da questão 3 é

$$\mathbf{E} = \cos[2\pi(3x + 4y) - 10\pi ct]\hat{z}. \tag{91}$$

O campo magnético, por sua vez, é dado por

$$\mathbf{B} = \frac{-3\hat{y} + 4\hat{x}}{5c}\cos[2\pi(3x + 4y) - 10\pi ct]. \tag{92}$$

O produto vetorial $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ é então

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{5c}\cos^2[2\pi(3x + 4y) - 10\pi ct]\hat{z} \times (4\hat{x} - 3\hat{y}) &(93)\\
&= \frac{1}{5c}\cos^2[2\pi(3x + 4y) - 10\pi ct](4\hat{y} + 3\hat{x}) &(94)\\
&= \frac{\mathbf{k}}{c}\cos^2[2\pi(3x + 4y) - 10\pi ct] &(95)\\
\mathbf{S} &= \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 c}\cos^2[2\pi(3x + 4y) - 10\pi ct]. &(96)
\end{aligned}$$

Questão 10

Encontre o valor médio, num ponto qualquer $\mathbf{r}$, do vetor de Poynting na questão 9. Calcule a média no intervalo de tempo que vai de $t = 0$ até $t = T$, onde T é o período de oscilação da onda.

O período T de oscilação é $2\pi/\omega = 1/5c$. O valor médio, em um ponto qualquer, é então

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{S}\rangle &= \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 c}\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2[2\pi(3x + 4y) - 10\pi ct]dt &(97)\\
&= \frac{\mathbf{k}}{2\mu_0 c}5c\int_0^{1/5c} \{1 + \cos[4\pi(3x + 4y) - 20\pi ct]\}\, dt. &(98)
\end{aligned}$$

A primeira integral, $\int_0^{1/5c} dt = 1/5c$. A segunda integral calcularemos à parte:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/5c} \cos[4\pi(3x + 4y) - 20\pi ct]dt &= -\frac{1}{20\pi c}\int_{4\pi(3x+4y)}^{4\pi(3x+4y)-4\pi} \cos(u)du &(99)\\
&= -\frac{1}{20\pi c}\sin(u)\Big|_{4\pi(3x+4y)}^{4\pi(3x+4y)-4\pi} &(100)\\
&= -\frac{1}{20\pi c}\{\sin[4\pi(3x + 4y) - 4\pi] - \sin[4\pi(3x + 4y)]\} &(101)\\
&\equiv 0. &(102)\\
\langle\mathbf{S}\rangle &= \frac{\mathbf{k}}{2\mu_0 c}. &(103)
\end{aligned}$$

$\langle\mathbf{S}\rangle$ é constante no espaço!