MAT0234 Medida e Integração
Segundo Semestre de 2020
Aula 13

Aplicações dos Teoremas

Notação: Indicaremos $\int_{[a,b]} f\ d\mu$ para a Integral de Lebesgue no intervalo [a,b] e $\int_a^b f(x)\ dx$ para a Integral de Riemann.
Já vimos que se existir a Integral de Riemann de f num intervalo limitado [a,b], f é mensurável e a Integral de Lebesgue é igual a Integral de Riemann. E as integrais impróprias de Riemann?
Integral Imprópria de Riemann e Integral de Lebesgue A propriedade seguinte é muito simples mas pode ser útil.

Proposição 1. *Se f mensurável e $|f| \leq g$ onde g é integrável, então f é integrável.*

Solução: com efeito, como $|f|\ e\ g \in M^+$ então $|f|$ integrável. Agora, $|f| = f^+ + f^-$ e como f mensurável, $f = f^+ - f^-$ resulta f integrável.

Proposição 2. *Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}^+$ (≥ 0) tal que existe a integral imprópria de Riemann $I = lim_{x\uparrow b} \int_a^x f\ dx$. Então existe a $\int_{[a,b]} f\ d\mu$ e é igual 'a integral imprópria.*

Observe que tomando por exemplo $b_n \uparrow b, e f_n = f\ \chi_{[a,b_n]}$ temos que a sequencia é monótona e as integrais uniformemente limitadas por I=integral imprópria de Riemann. Pelo Teo da Convergencia Monótona $\int_{[a,b]} f_n\ d\mu \to \int_{[a,b]} f\ d\mu = I$. Como para as f_n as Integrais de Riemann e de Lebesgue coincidem, os limites respectivos devem ser iguais. Isto é válido para b finito ou $b = +\infty$.
Observação: para mostrar que uma função contínua em R (ou em algum intervalo infinito) é limitada, basta mostrar que é limitada no infinito. Fica como exercício.

1. **Exercício** Mostre que $\int_1^{+\infty} e^{-x}\ dx = \int_{[1,+\infty)} e^{-x}\ d\mu$.
   Solução: Note que $f_n = e^{-x}\chi_{[0,n]} \to e^{-x}$ monotonamente. Pelo Teo da Convergência Monótona, $\int_{[1,+\infty)} e^{-x}\ d\mu \to \int_{[1,+\infty)} e^{-x}\ d\mu$. Mas $\int_{[1,n]} e^{-x}\ d\mu = \int_1^n e^{-x}\ dx = e^{-1} - e^{-n} \to e^{-1}$.

2. **Exercício** Calcule $\lim_{n\to +\infty} \int_0^1 nt\ sent\ \dfrac{1}{1+nt}\ dt$
   Solução: $f_n = nt\ sent\ \dfrac{1}{1+nt} = sent\ [1 - \dfrac{1}{1+nt}];\ t \in [0,1]$. Aqui notamos que por um lado $f_n \to sent$ e que $f_n \geq 0$ monótona e também $f_n \leq sent$. Podemos utilizar o Teo da Convergência Monótona para deduzir que $\int f_n\ d\mu \to \int_{[0,1]} sent\ d\mu = \int_0^1 sent\ dt = 1 - cos(1)$.
   Outra solução: sem usar a monotonicidade de f_n podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada porque $f_n \leq sent$ positivas em [0,1].

3. **Exercício** Calcule $\lim_{n\to +\infty} \int_a^{+\infty} n^2\ t\ e^{-n^2\ t^2}\ \dfrac{1}{1+t^2}\ dt$ sendo $a > 1$.

Solução: $f_n = n^2\ t\ e^{-n^2\ t^2}\ \dfrac{1}{1+t^2}\ \chi_{[0,n]} \geq 0$. A sequência converge para 0, quando n vai para infinito (pode-se ver por Regra de L'Hôpital). Também $f_n \leq \dfrac{1}{1+t^2}$. Para mostrar isto devemos mostrar que $n^2\ t\ e^{-n^2\ t^2} \leq 1;\ t > 1$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, $\int f_n\ d\mu \rightarrow 0$. Outra forma: podemos tomar $g_n = n^2\ t\ e^{-n^2\ t^2}\ \dfrac{1}{1+t^2}$. Como $g_n \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, g_n é integrável para todo n. E seguimos pelo Teorema da COnvergência Dominada como acima. Pergunta: pode-se aplicar o Teorema da Convergência Monótona?

4. **Exercício** Sejam $f_n : [0,1] \rightarrow [0,1]$; $f_n \rightarrow 0$, *contínuas*. Mostre usando Integral de Lebesgue que $\int_{[0,1]} f_n\ d\mu \rightarrow 0$. A seguir, para verificar a força dos métodos desenvolvidos, tente mostrar isto sem usar a Integral de Lebesgue.

   Proposição 3. *Seja $f : [a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existem as integrais impróprias de Riemann $I = lim_{x\uparrow b} \int_a^x f\ dx$ e $M = lim_{x\uparrow b} \int_a^x |f|\ dx$. Então existe a $\int_{[a,b]} f\ d\mu$ e é igual a integral imprópria I.*

   Dem: Tomando por exemplo $b_n \uparrow b$, e $f_n = f\ \chi_{[a,b_n]}$ temos que a $|f_n| \leq |f|$. Mas não sabemos se $|f|$ é integrável! Só sabemos que sua integral imprópria existe. A sequência $|f_n|$ é monótona e suas integrais $\int_{[a,b]} |f_n|\ d\mu$ uniformemente limitadas por M=integral imprópria de Riemann de $|f|$. Pela Proposição 2 anterior,
   $\int_{[a,b]} |f_n|\ d\mu \rightarrow \int_{[a,b]} |f|\ d\mu = M$. Assim, $|f|$ é integrável e portanto f é integrável.
   Como f é integrável podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para a sequência f_n (sem módulo!), lembrando ainda que $|f_n| \leq |f|$. E assim $\int_{[a,b]} f_n\ d\mu \rightarrow \int_{[a,b]} f\ d\mu = I$.
   Isto é válido para b finito ou $b = +\infty$.

5. **Exercício** $\lim_{n\rightarrow+\infty} \int_{[0,+\infty)} sen(\dfrac{x}{n})\ \dfrac{1}{1+x^2} dx$
   Solução: seja $f_n = sen(\dfrac{x}{n})\ \dfrac{1}{1+x^2}$. É claro que $|f_n| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$. Logo são integráveis e a sequência é dominada por $g = \dfrac{1}{1+x^2}$. Por outro lado, é fácil ver que $f_n(x) \rightarrow_{n\rightarrow\ +\infty} 0$. Assim
   $\lim_{n\rightarrow+\infty} \int_{[0,+\infty)} sen(\dfrac{x}{n})\ \dfrac{1}{1+x^2} dx = 0$

   Exercício. $\lim_{n\rightarrow+\infty} \int_{[0,+\infty)} cos(\dfrac{x}{n})\ \dfrac{1}{1+x^2} dx$

Apliquemos 'as Integrais **Dependentes de uma outra variável ou parâmetro**

Proposição 4. ***Continuidade dependente de um parâmetro:*** *Seja $f(x,t) : X \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

1. $\forall t \in [a,b]$, a função $f(,t)$ é mensurável.

2. *para quase todo $x \in X$, a função $f(x,)$ é contínua em $[a, b]$.*

3. *$\exists g \in L^1 \diagup |f(x,t)| \leq |g(x)|$*
   Então: a função $\beta(t) = \int_X f(x,t) d\mu(x)$ é contínua em $[a, b]$.

Dem: Seja $c \in [a, b]$; $e\ t_n \rightarrow c\ e\ h_n(x) = f(x, t_n)$. A sequência h_n é dominada por g e $h_n(x) = f(x, t_n) \rightarrow f(x, c)$ por hipótese . Pelo Teorema da Convergência Dominada, $\beta(t_n) = \int_X h_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x,c) d\mu(x) = \beta(c)$. Como isto acontece para qualquer sequência $t_n \rightarrow c$, β é contínua.

Observação 1: Para mostrar a continuidade, derivabilidade, etc com respeito ao parâmetro t, basta verificá-lo num intervalo limitado [a,b].

Exercício. A. Para mostrar que uma função contínua em R é limitada, basta mostrar que é limitada no infinito.

Exercício. B. Seja $g(x) = P(x)\ e^{-ax}$; *onde* $x \geq 0$; $a > 0$, $e\ P(x)$ é um polinômio. Então existe $M > 0$ tal que $|g(x)| = M\ e^{-\frac{ax}{2}}$.

Exercício. Seja f(x,t) = $\begin{cases} \dfrac{xt}{x^2+t^2}; \ (x,t) \neq (0,0) \\ 0; \quad se(x,t) = (0,0) \end{cases}$

Mostre que $h(t) = \int_{[0,1]} \dfrac{xt}{x^2+t^2}\, d\mu(x)$, $t \in [0, 1]$ é contínua.

Usamos a Proposição anterior e observamos que o integrando é contínuo para x fixo. Também $0 \leq (x - t)^2 = x^2 + t^2 - 2\,xt$. Logo $2\,xt \leq x^2 + t^2$ e portanto $\frac{xt}{x^2+t^2} \leq \frac{1}{2}$. Basta tomar $g(x) = \frac{1}{2}$.

Exercício. Mostre que $\varphi(t) = \int_0^\infty t\ e^{-x^2\, t^2}\ dx. t > 0$ é contínua.

Observamos que para x fixo o integrando f(x,t) é contínuo. Tomamos $t \in [a, b]$; $a > 0$; $b \in \mathbb{R}$. Para mostrar que $\varphi(t)$ é contínua em t, procuramos g que domine f(x,t), $t \in [a, b]$. Então nesse caso, $f(x,t) = t\ e^{-x^2\, t^2}$. Aqui $t \leq b$ e $e^{-x^2\, t^2} \leq e^{-x^2\, a^2}$. Logo tomamos $g(x) = b\ e^{-x^2\, a^2}$. Esta função é integrável. E $\varphi(t)$ é contínua em t. Mostremos que $h(x) = e^{-x^2\, a^2}$ é integrável. Com efeito $\int_0^\infty e^{-x^2\, a^2}\ dx \times \int_0^\infty e^{-y^2\, a^2}\ dy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2\, a^2}\ d\theta\ d\rho =$ $\frac{\pi}{2}\ e^{-\rho^2\, a^2}|_0^\infty\ (\frac{-1}{2\,a^2}) = \frac{\pi}{4\,a^2}$. Portanto, $\int_0^\infty e^{-x^2\, a^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,a}$.

Proposição 5. ***Derivabilidade dependente de um parâmetro:*** *Seja $f(x,t)$ como acima e suponha que para $t \in [a, b]$ temos:*

1. *$\exists \int_X f(x,t) d\mu(x)$*

2. *$\exists \dfrac{\partial f}{\partial t}$ em $X \times [a, b]$*

3. *$\exists$ uma função h integrável em X com $\left|\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \leq h(x)$.*
   Então $\beta(t)$ do exercício anterior é derivável em [a,b] e

$$\beta'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t} d\mu(x) = \frac{d \int_X f(x,t) d\mu(x)}{dt}$$

Dem: Inicialmente devemos ver que $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ é mensurável para cada t. Para isto basta lembrar que $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \lim_{t_n \to t} \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$, sequência de funções mensuráveis. Também, observemos que pelo TVM $\dfrac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} = \dfrac{\partial f(x,s_n)}{\partial t}$ onde s_n está entre t_n e t. Note que s_n pode depender de cada x. Para a derivabilidade, notemos que $\dfrac{\beta(t_n) - \beta(t)}{t_n - t} = \int \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} d\mu(x) = \int \dfrac{\partial f(x,s_n)}{\partial t} d\mu(x)$. Como o integrando está dominado por h(x), aplicamos o Teorema da Convergência Dominada para concluir a demonstração.

Exercício. Mostre que $\alpha(t) = \int_0^\infty cos(xt)\ e^{-x}\ dx$ tem derivada primeira contínua.

Solução: $f(x,t) = cos(xt)\ e^{-x}$ é integrável em x e contínua em t para x fixo. $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\ x\ cos(xt)\ e^{-x}$ é contínua em t. Precisamos ver que é dominada por uma h(x). Seja $t \in [a,b]$. Pelo Exercício 2, $\exists\ M \in \mathbb{R};\ |x\ e^{-x}| \leq M\ e^{\frac{-x}{2}}$. Logo $|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}| \leq M\ e^{\frac{-x}{2}}$, onde $h(x) = M\ e^{\frac{-x}{2}}$ e então $\exists\ \alpha'(t)$. Note que não foi necessário usar o fato de que $t \in [a,b]$.
Falta ver que $\alpha'(t)$ é contínua. Isto é imediato porque $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ é contínua em t e dominada por h(x).

Exercício. Mostre que $\varphi(t) = \int_0^\infty t\ e^{-x^2\ t^2}\ dx;\ t > 0$ é derivável.

Exercício. Mostre que se $|g|$ for integrável e $t > 0$, então $\beta(t) = \int_0^\infty g(x)\ e^{-xt}\ dx; t > 0$ é derivável.

Solução; Esta é a Transformada de Laplace real (porque t é real).
$f(x,t) = g(x)\ e^{-xt}$ é integrável para em x e contínua em t para x fixo. $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = g(x)\ (-x)\ e^{-xt}$ é contínua em t. Precisamos ver que é dominada por uma h(x). Seja $t \in [a,b];\ a > 0$. Logo pelo Exercício B segue que $\exists\ M \in \mathbb{R};\ |-x\ e^{-xt}| \leq M\ e^{\frac{-xa}{2}}$. Assim $|f(x)\ M\ e^{\frac{-xa}{2}}| \leq |f(x)|\ M$. Tomamos $h(x) = M\ |f(x)|$ que é integrável, e aplicando a Proposição 5 segue que $\beta(t)$ é derivável.
Note que idêntico raciocínio mostra que $\beta(t)$ tem todas as derivadas.