23-6 Energia potencial eletrostática

A energia potencial eletrostática de um sistema de cargas puntiformes é o trabalho necessário para trazê-las desde uma separação infinita até suas posições finais.

Objetos que se repelem entre si têm maior energia potencial se eles estão próximos, e objetos que se atraem têm maior energia potencial se eles estão bem afastados.

Suponha que exista uma carga puntiforme q_1 no ponto 1. Para trazer uma segunda carga puntiforme q_2 do repouso no infinito para o repouso no ponto 2, a uma distância r_{12} do ponto 1, é necessário realizar o trabalho:

$$W_2 = q_2 V_2 = q_2 \frac{kq_1}{r_{12}} = \frac{kq_2 q_1}{r_{12}}$$

onde V_2 é o potencial no ponto 2 devido à presença da carga q_1.

O potencial num ponto 3,
a uma distância r_{13} de q_1 e a uma distância r_{23} de q_2 , é

$$V_3 = \frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}}$$

e, portanto, para trazer uma carga puntiforme adicional q_3 do repouso no infinito para o repouso no ponto 3 é necessário realizar um trabalho adicional

$$W_3 = q_3 V_3 = \frac{kq_3 q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3 q_2}{r_{23}}$$

O trabalho total necessário para agrupar as três cargas é a energia potencial eletrostática do sistema de três cargas puntiformes

$$U = \frac{kq_2 q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3 q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3 q_2}{r_{23}}$$

Esta quantidade de trabalho é independente da ordem na qual as cargas são trazidas até suas posições finais.

Reescrevendo a energia potencial eletrostática do sistema de três cargas puntiformes

$$U = \frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}}$$

Os dois primeiros termos no lado direito dessa equação podem ser escritos como

$$\frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} = q_1\left(\frac{kq_2}{r_{12}} + \frac{kq_3}{r_{13}}\right) = q_1V_1$$

onde V_1 é o potencial na posição de q_1 devido às cargas q_2 e q_3.
De maneira análoga, o segundo e o terceiro termos representam a q_3V_3 onde V_3 é o potencial devido às cargas q_1 e q_2,
e o primeiro e o terceiro termos são iguais à q_2V_2 onde V_2 é o potencial devido às cargas q_1 e q_3.

Reescrevendo a energia potencial eletrostática do sistema de três cargas puntiformes

$$U = \frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}}$$

Podemos, então, reescrever essa equação como

$$U = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{kq_2q_1}{r_{12}} + \frac{kq_3q_1}{r_{13}} + \frac{kq_3q_2}{r_{23}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}q_1\left(\frac{kq_2}{r_{12}} + \frac{kq_3}{r_{13}}\right) + \frac{1}{2}q_2\left(\frac{kq_3}{r_{23}} + \frac{kq_1}{r_{12}}\right) + \frac{1}{2}q_3\left(\frac{kq_1}{r_{13}} + \frac{kq_2}{r_{23}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3)$$

Assim, a energia potencial eletrostática de um sistema de *n* cargas puntiformes é $U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_iV_i$

A última equação do slide anterior, da energia potencial eletrostática de um sistema de *n* cargas puntiformes

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

também pode descrever a energia potencial eletrostática de uma distribuição contínua de cargas.

Considere um condutor esférico de raio *R*.
Quando a esfera possui uma carga *q*,
seu potencial relativo a *V* = 0 no infinito é

$$V = \frac{kq}{R}$$

O trabalho que devemos realizar para trazer uma quantidade adicional de carga *dq* do infinito ao condutor é *Vdq*.
Este trabalho é igual ao aumento na energia potencial do condutor

$$dU = V\,dq = \frac{kq}{R}\,dq$$

Assim de $dU = V\,dq = \frac{kq}{R}\,dq$ podemos integrar em *dq* desde zero até seu valor final *Q*, obtendo a energia potencial total

$$U = \frac{k}{R}\int_0^Q q\,dq = \frac{kQ^2}{2R} = \frac{1}{2}QV$$ onde $$V = \frac{kQ}{R}$$

é o potencial na superfície de uma esfera completamente carregada.

Apesar de termos derivado essa equação para um condutor esférico, ela é válida para qualquer condutor.

E, considerando um conjunto de *n* condutores, com o i-ésimo condutor a um potencial V_i e com uma carga Q_i, a energia potencial eletrostática será

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i$$

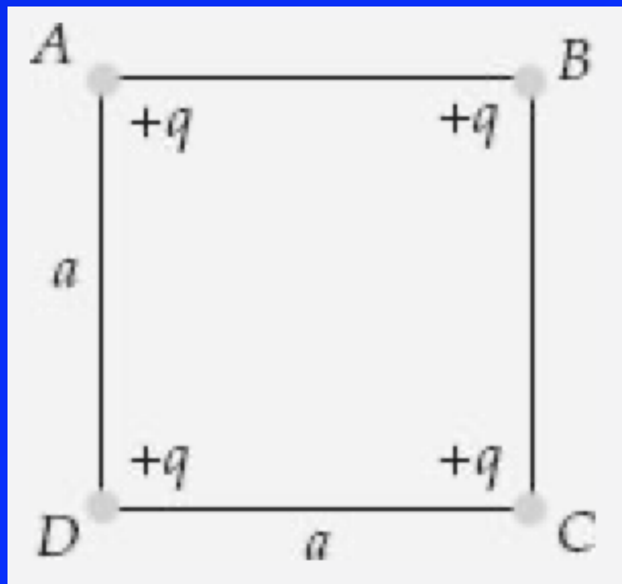
Exemplo 23-16 Trabalho necessário para aproximar cargas puntiformes

Quatro cargas puntiformes positivas idênticas, cada uma com carga *q*, estão inicialmente em repouso a uma separação infinita.

(a) Calcule o trabalho total necessário para mover as cargas puntiformes para os quatro vértices de um quadrado de lado *a*, calculando separadamente o trabalho necessário para mover sequencialmente cada carga até sua posição final.

(b) Mostre que a equação $U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$ **fornece o trabalho total.**

Note que, nenhum trabalho é necessário para mover a primeira carga *A* para um dos vértices porque o potencial neste vértice é zero quando as outras três cargas estão no infinito.



(a) Assim, $W_A = 0$

Trazendo a segunda carga para o ponto *B*, o trabalho necessário é $W_B = qV_B$, onde V_A é o potencial no ponto *B* devido à carga *A*,

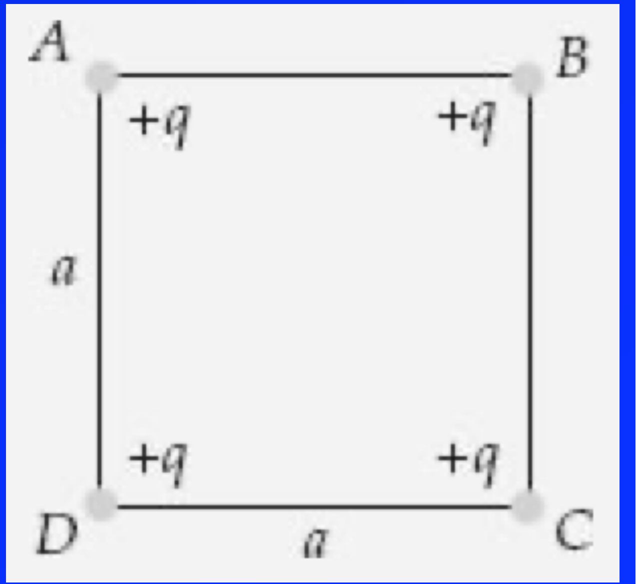
assim $$W_B = qV_B = q\left(\frac{kq}{a}\right) = \frac{kq^2}{a}$$

$W_C = qV_C$, onde V_C é o potencial no ponto *C* devido às cargas nos pontos *A* e *B*, assim

$$W_C = qV_C = q\left(\frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq^2}{a}$$

Similarmente para W_D

$$W_D = qV_D = q\left(\frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a} + \frac{kq}{a}\right) = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq^2}{a}$$



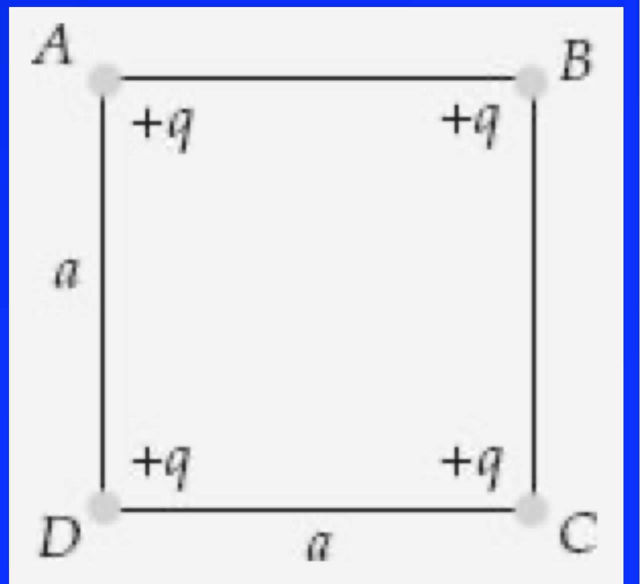
Dessa forma podemos escrever o trabalho total para reunir essas cargas na geometria desejada, obtendo

$$W_{\text{total}} = W_A + W_B + W_C + W_D = \boxed{(4 + \sqrt{2})\frac{kq^2}{a}}$$

(b) Calculando W_{total} a partir de $$W_{\text{total}} = U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V_i$$

podemos notar que, para essa geometria, V_D representa o potencial de qualquer uma das 4 cargas, considerando a existência das outras 3,

$$W_D = qV_D = q\left(\frac{kq}{a} + \frac{kq}{\sqrt{2}a} + \frac{kq}{a}\right) = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq^2}{a}$$



Assim, $$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_D$$

e ainda, como dado do problema

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$$

Portanto,

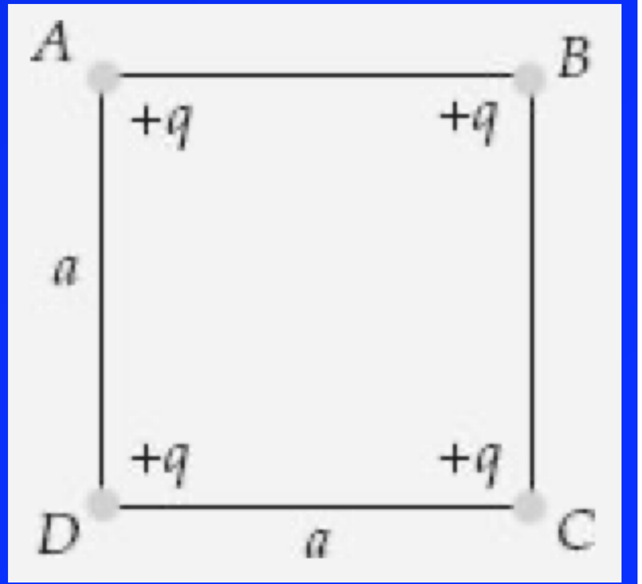
$$W_{total} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q V_D = \frac{1}{2} q V_D \sum_{i=1}^{4} 1 = \frac{1}{2} q V_D 4$$

sendo

$$V_D = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq}{a}$$

Assim

$$W_{total} = 2q\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{kq}{a} = \boxed{(4 + \sqrt{2})\frac{kq^2}{a}}$$



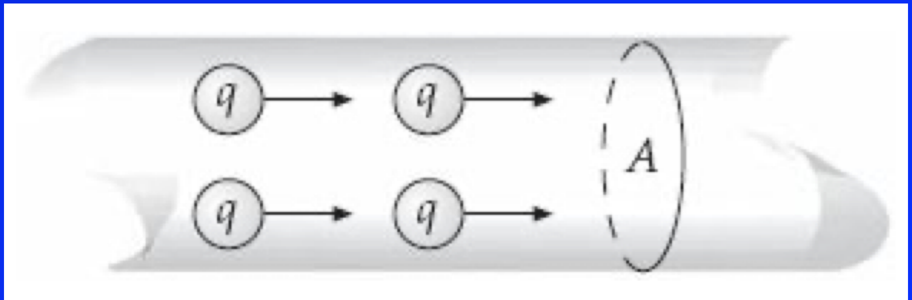
O que nos dá o mesmo resultado para os itens (a) e (b).

Capítulo 25 do Tipler (6ª edição)
25-1 Corrente e o movimento de cargas

Corrente elétrica é a carga por unidade de tempo que flui através de uma superfície, tipicamente a seção transversal de um fio condutor.

A figura mostra um segmento de um fio que está conduzindo uma corrente (cargas estão em movimento).
Se ΔQ é a carga que flui através da área da seção transversal, *A*, no tempo Δt, no limite em que Δt tende a zero, então a corrente *I* é dada por

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$



A unidade de corrente no SI é o ampère (A)

$$1\ \mathrm{A} = 1\ \mathrm{C/s}$$

Cargas móveis podem ser positivas ou negativas.

A corrente também pode ser positiva ou negativa.
Inicialmente se define um sentido positivo ao longo do fio.
Por convenção, o sinal da corrente será positivo se a corrente for devida a cargas positivas se movendo no sentido positivo do fio ou a cargas negativas se movendo no sentido negativo.
A corrente será negativa se ela é devida a cargas positivas se movendo no sentido negativo do fio ou a cargas negativas se movendo no sentido positivo.

Os portadores de carga livre em metais são os elétrons livres.
Portanto, em um fio condutor metálico, os elétrons livres se movem no sentido negativo quando a corrente é positiva e vice-versa.

Em um fio metálico, o movimento de elétrons livres carregados negativamente é bastante complexo.

Quando não há campo elétrico no fio, os elétrons livres se movem em direções aleatórios com velocidades da ordem de 10^6 m/s e colidem frequentemente com os íons da rede no fio.
Como os vetores velocidade dos elétrons estão orientados aleatoriamente, a velocidade média é zero.
Quando um campo elétrico é aplicado, o campo exerce uma força $-e\vec{E}$ em cada elétron livre, variando sua velocidade no sentido oposto ao do campo.
Entretanto, os elétrons continuam se chocando com íons da rede no fio, com perda de energia, mas, em média, adquirem velocidade no sentido oposto ao do campo.
O resultado líquido desta repetição de aceleração e dissipação de energia é que os elétrons deslocam-se ao longo do fio com uma pequena velocidade média (10^{-5} m/s), dirigida no sentido oposto ao do campo elétrico, chamada de velocidade de deriva.

Densidade de número de portadores de carga *n*

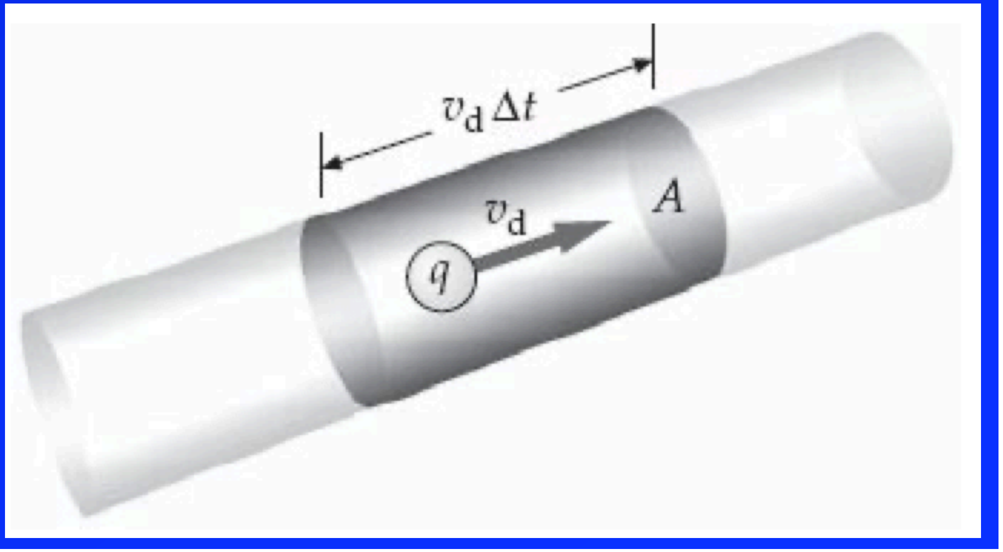
Seja *n* o número de partículas móveis carregadas (portadores de carga) por unidade de volume em um fio condutor de seção transversal *A*.

Considere que cada partícula tenha uma carga *q* e se mova no sentido positivo com uma velocidade de deriva v_d.
Durante o tempo Δt, todas as partículas no volume $A\, v_d\, \Delta t$, mostrado na figura, passam pelo elemento de área.
O número de partículas neste volume é $n\, A\, v_d\, \Delta t$ e a carga livre total no volume é $\Delta Q = q\, n\, A\, v_d\, \Delta t$.

A corrente é portanto

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv_d$$

que é a relação entre a corrente e a velocidade de deriva dos elétrons.



A corrente por unidade de área é obtida dividindo ambos os lados da equação $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv_d$ pela área A, obtendo qnv_d, que é o módulo do vetor densidade de corrente, $\vec{j}$, definido por

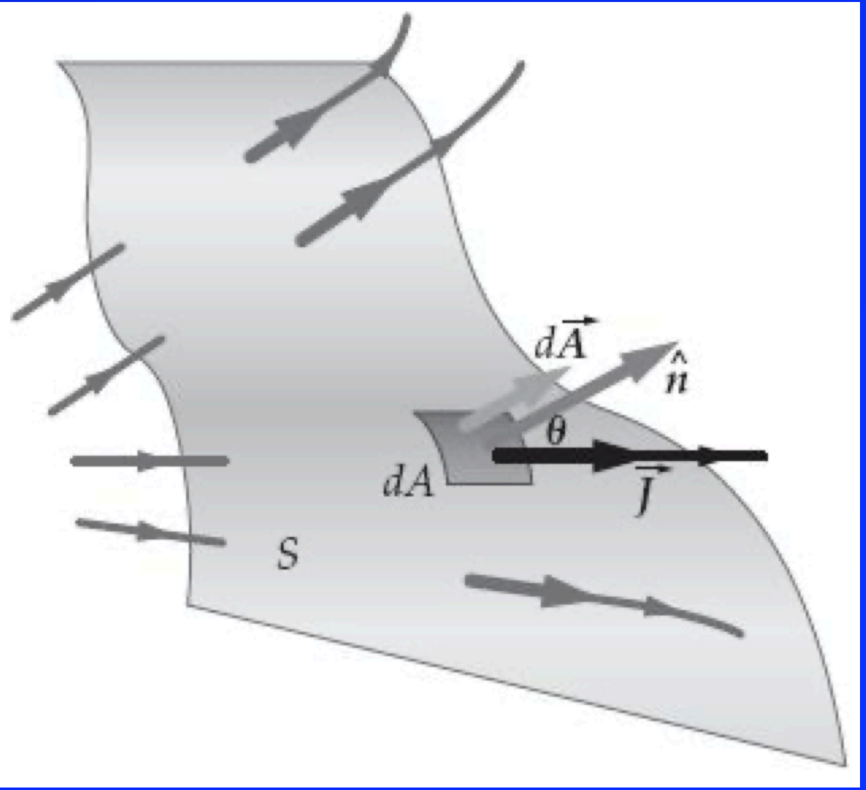
$$\vec{J} = qn\vec{v}_d$$

A corrente através de uma superfície S é definida como o fluxo do vetor densidade de corrente $\vec{j}$ através da superfície.

Isto é,

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA$$

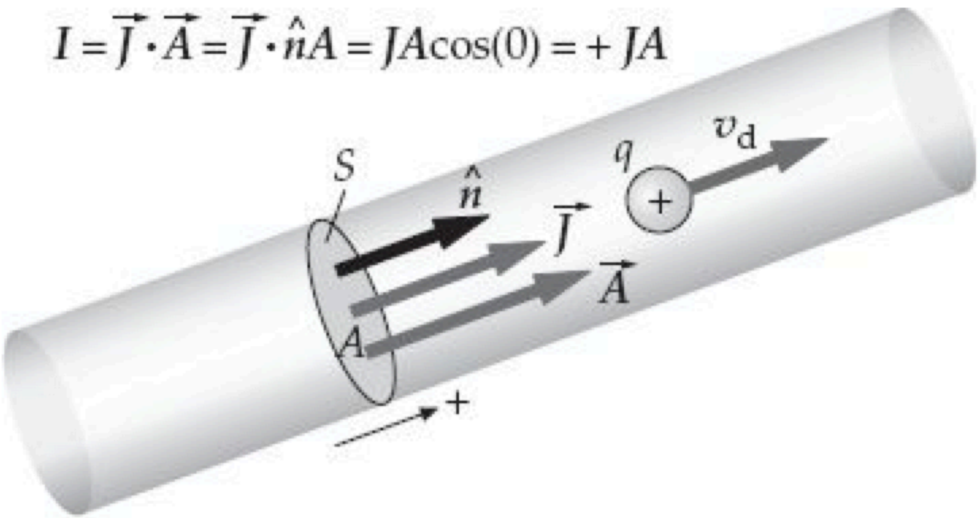
onde $d\vec{A}$ é um elemento de área para a superfície S e $\hat{n}$ é o versor normal à superfície S no sentido de $d\vec{A}$.

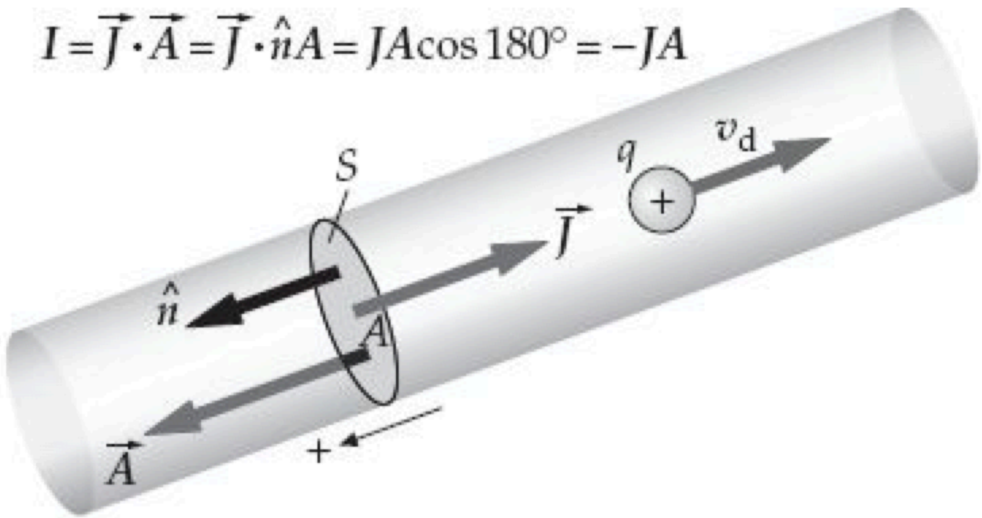


Se $\vec{j}$ é uniforme e se a superfície é plana,
o que significa que $\hat{n}$ é uniforme, então o fluxo é

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \vec{J} \cdot \vec{A} = \vec{J} \cdot \hat{n} A = JA \cos\theta$$

onde $\vec{A}$ é a área da superfície e θ é o ângulo entre $\vec{j}$ e $\hat{n}$.
O sinal da corrente I é o mesmo de $\cos\theta$.
Se $\theta < 90^o$, I é positiva e se $\theta > 90^o$, então I é negativa.





A seta com o sinal positivo próximo a cada fio na figura indica a escolha para o sentido de $\hat{n}$ nas superfícies transversais do fio.