Lista de problemas 1 - espaços métricos

Exercício 1: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $\|x - y\| = d > 0$ e $r > 0$. Mostre que, se $n \geq 3$:

a) Se $2r > d$ existem infinitos $z \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\|z - x\| = \|z - y\| = r \ .$$

b) Se $2r = d$ existe exatamente um tal z.

c) Se $2r < d$ não existe nenhum tal z.

Como se modificam essas sentenças quando $n = 1, 2$?

Exercício 2: Mostre que, qualquer que seja a norma $\|\cdot\|$ adotada em $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, a *esfera unitária* $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}$ é um conjunto infinito.

Exercício 3: Para $p > 0$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \ .$$

Além disso, definimos também:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \ .$$

a) Mostre que, se $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_p$ *não* define uma norma em $\mathbb{R}^n$ se $n > 1$.

b) Verifique que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

c) **(Desigualdade de Young)** Dizemos que dois números $p > 1$ e $q > 1$ são *conjugados* se $1/p + 1/q = 1$. Mostre que, se p, q são conjugados, então para todos $a, b \geq 0$ vale:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ .$$

Sugestão: Mostre que a função $f_\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $t \mapsto t^\alpha - \alpha t$ tem um máximo absoluto em $t = 1$. Conclua que $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha) \, \forall \, t > 0$ e escolha t e α convenientemente.

d) **(Desigualdade de Hölder)** Mostre que, se p e q são conjugados e $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q \ .$$

Verifique ainda que, se convencionamos que $p = 1$ e $q = \infty$ são conjugados, a desigualdade vale também neste caso.

Sugestão: Na desigualdade de Young, tome $a = |x_i| \,/\, \|x\|_p$, $b = |y_i| \,/\, \|y\|_q$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e some.

e) **(Desigualdade de Minkowski)** Mostre que se $1 \leq p \leq \infty$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, então

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \ .$$

Conclua que, neste caso, $\|\cdot\|_p$ define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Sugestão: Comece observando que $|x_i + y_i|^p \leq |x_i|\,|x_i + y_i|^{p-1} + |y_i|\,|x_i + y_i|^{p-1}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Em seguida aplique a desigualdade de Hölder e verifique que, se q é o conjugado de p, $q(p-1) = p$.

Exercício 4: Seja (M, d) um espaço métrico. Dados um ponto $p \in M$ e um subconjunto $X \subseteq M$ não vazio, definimos a *distância do ponto ao conjunto* como

$$\operatorname{dist}(p, X) = \inf_{x \in X} d(p, x)$$

a) Verifique que, para todos $p, q \in M$, vale:

$$|\operatorname{dist}(p, X) - \operatorname{dist}(q, X)| \leq d(p, q) \ .$$

b) Mostre que $p \in \overline{X}$ se, e somente se, $\operatorname{dist}(p, X) = 0$.

c) Mostre que X é fechado se, e somente se $X = \overline{X}$. Conclua que $\overline{X}$ é o *menor* subconjunto fechado de M contendo X.

d) Mostre que, se $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ são subconjuntos de M, então

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \quad , \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \quad \text{e} \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \ .$$

Dê exemplos em que $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ e $\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$.

e) Seja $\Phi(M)$ a coleção dos subconjuntos não-vazios de M que são fechados e limitados. Dados $X, Y \in \Phi(M)$, definimos:

$$\rho(X, Y) = \max\left\{ \sup_{x \in X} \operatorname{dist}(x, Y) \ , \ \sup_{y \in Y} \operatorname{dist}(y, X) \right\} \ .$$

Verifique que ρ define uma métrica em $\Phi(M)$, a **métrica de Hausdorff**.

Exercício 5: Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado equipado com a métrica induzida. Mostre que, para todos $p \in V$ e $r > 0$,

$$\mathrm{Fr}\, B_r\,(p) = \mathrm{Fr}\, B_r\,[p] = S_r\,[p] \quad \text{e} \quad \overline{B_r\,(p)} = B_r\,[p] \ .$$

Valem resultados análogos em um espaço métrico qualquer?

Exercício 6: Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que, se nenhum ponto de um subconjunto $X \subset M$ é de acumulação, para cada $x \in X$ é possível encontrar uma bola B_x centrada em x de tal forma que $B_x \cap B_y = \varnothing$ se $x \neq y$. Em particular, conclua que todo subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$ nas métricas usuais é, no máximo, enumerável.

Exercício 7: Mostre que todo conjunto não-enumerável de $\mathbb{R}^n$ tem um ponto de acumulação.

Exercício 8: Mostre que se $K \subset U \subseteq \mathbb{R}^n$, onde K é compacto não-vazio e U é aberto, então existe um conjunto compacto L tal que $K \subset L^\circ \subset L \subset U$.

Exercício 9: Mostre que o conjunto $E = \overline{G(f)}$ não é conexo por caminhos, onde $G(f)$ é o gráfico da função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(1/x)$.

Sugestão: Mostre que se $\gamma : [0, 1] \to E$ é um caminho com $\gamma(0) = (0, 0)$, então $\gamma(t) \in \{0\} \times [-1, 1]\ \forall\, t \in [0, 1]$.

Exercício 10: Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que $X \subset M$ é *magro* quando

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \ ,$$

onde cada $F_n \subset M$ é um subconjunto fechado de interior vazio.

a) Verifique que um subconjunto $X \subset M$ tem interior vazio se, e somente se, $M \setminus X$ é denso.

   Obs: $D \subset M$ é dito *denso* se $\overline{D} = M$.

b) Mostre que, se M é completo, então a intersecção enumerável de abertos densos é densa.

   Sugestão: Seja $Y = \bigcap A_n$ a intersecção dos abertos densos A_n. Verifique que Y satisfaz: fixada B bola aberta arbitrária, existe $x_1 \in A_1$ tal que $B_1 = B_{r_1}(x_1) \subset B \cap A_1$. Por indução, é possível escolher bolas abertas B_n tais que $\overline{B_n} \subset B_n \cap A_{n+1}$ e $r_n \to 0$. A sequência de centros dessas bolas é de Cauchy e tem como limite um ponto em $Y \cap B$.

c) **(Teorema de Baire)** Mostre que se X é um conjunto magro em um espaço métrico completo, então X tem interior vazio.