Por: Ulisses Lakatos de Mello [1]

Apresentamos aqui o desenvolvimento completo de um exemplo de espaço conexo que não é conexo por caminhos, conhecido como **seno dos topólogos**, na forma de um exercício resolvido. `Neste link` encontra-se uma figura de apoio que pode ajudar na compreensão do argumento.

Exercício: Mostre que o conjunto $E = \overline{G(f)}$ não é conexo por caminhos, onde $G(f)$ é o gráfico da função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(1/x)$.

Solução. Podemos escrever E como $E = E_1 \cup E_2$, onde E_1 é o segmento $\{0\} \times [-1, 1]$ e $E_2 = G(f)$. Vamos mostrar que, se $\gamma : [0, 1] \to E$ é um caminho contínuo tal que $\gamma(0) = (0, 0) \in E_1$, então $\gamma(t) \in E_1 \, \forall \, t$. Assim, não pode existir caminho em E ligando $(0, 0)$ a pontos de E_2 e, portanto, E não pode ser conexo por caminhos.

Seja

$$A = \gamma^{-1}(E_1) = \{t \in [0, 1] \, : \, \gamma(t) \in E_1\} \ .$$

Como E_1 é fechado em E (pois é fechado em $\mathbb{R}^2$) e γ é contínua, A é fechado em $[0, 1]$. Além disso, $0 \in A \neq \varnothing$.

Vamos ver agora que A é aberto em $[0, 1]$: tome $t_0 \in A$. Então, $\gamma(t_0) = (0, h)$, para algum $-1 \leq h \leq 1$. Agora, pela continuidade de γ, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$t \in [0, 1] \text{ e } |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - (0, h)|_M < 1 \ , \tag{1}$$

onde adotamos em $\mathbb{R}^2$ a métrica do máximo.

Escrevemos $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, onde as funções coordenadas $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ são contínuas. Se $D = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, 1]$, D é conexo, pois é a intersecção de dois intervalos com o ponto t_0 em comum. Logo, pelo TVI, $\gamma_1(D) \subset [0, +\infty)$ é um intervalo contendo 0.

Suponha que $\gamma_1(D)$ contém algum ponto $x > 0$. Então, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existem pontos

$$x_1 = \frac{2}{(1 + 4n)\pi} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2}{(3 + 4n)\pi}$$

tais que $0 < x_2 < x_1 < x$ e, portanto, $x_1, x_2 \in \gamma_1(D)$. Logo, existem $t_1, t_2 \in D$ tais que $\gamma(t_i) = x_i$. Agora, note que:

$$\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \ ,$$
$$\sin\left(\frac{1}{x_2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1 \ .$$

Mas, como $\gamma_1(t_1) = x_1 > 0$, temos que $\gamma(t_1) \in E_2 = G(f)$ e, portanto, $\gamma(t_1) = (x_1, \sin(1/x_1)) = (x_1, 1)$. Analogamente, $\gamma(t_2) = (x_2, -1)$. Porém, neste caso, temos:

- se $0 < h \leq 1$:

$$\begin{aligned} |\gamma(t_2) - (0, h)|_M &= |(x_1, -1) - (0, h)|_M \\ &= \max\{|x_1|, |-1 - h|\} \\ &\geq |-1 - h| \\ &= 1 + h > 1 \ , \end{aligned}$$

[1] `lakatos@ime.usp.br`

- se $-1 \leq h \leq 0$:

$$\begin{aligned} |\gamma(t_1) - (0,h)|_M &= |(x_1, 1) - (0,h)|_M \\ &= \max\{|x_1|, |1-h|\} \\ &\geq |1-h| \\ &= 1 - h \geq 1 \ , \end{aligned}$$

contradizendo (1). Logo, $\gamma_1(D)$ não pode conter nenhum ponto $x > 0$, sendo assim o intervalo degenerado $\gamma_1(D) = \{0\}$. Segue que:

$$t \in D = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,1] \ \Rightarrow \ \gamma(t) = (0, \gamma_2(t)) \in E_1 \ .$$

Ou seja, $D \subset \gamma^{-1}(E_1) = A$ é uma vizinhança de t_0 inteiramente contida em A. Assim, t_0 é ponto interior de A. Como t_0 era qualquer, A é de fato aberto em $[0,1]$.

Mas então obtivemos $A \subset [0,1]$ não-vazio que é aberto e fechado em $[0,1]$. Como $[0,1]$ é conexo, isso implica que $A = [0,1]$. Segue que $\forall\, t \in [0,1]$, como $t \in A$, temos $\gamma(t) \in E_1$, como queríamos demonstrar. $\square$