Aula de exercícios: o seno dos topólogos

terça-feira, 13 de outubro de 2020 13:00

Para diminuir a latência:

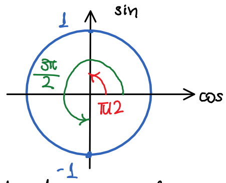
... → Configurações → Vídeo → Resolução de entrada: 720p

Início: 13h10

O seno dos topólogos : $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(Aula de 05/10)

$\boxed{E = \text{graf } f}$



$x = \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{4\pi}, \dots \Rightarrow f(x) = 0$ } forma geral: $\frac{1}{n\pi}$

$x = \underbrace{\frac{1}{\pi/2}, \frac{1}{\pi/2+2\pi}, \frac{1}{\pi/2+4\pi}}, \dots \Rightarrow f(x) = 1$

forma geral:

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} = \frac{2}{(1+4n)\pi}$$

$x = \underbrace{\frac{1}{3\pi/2}, \frac{1}{3\pi/2+2\pi}, \frac{1}{3\pi/2+4\pi}}, \dots \Rightarrow f(x) = -1$

forma geral:

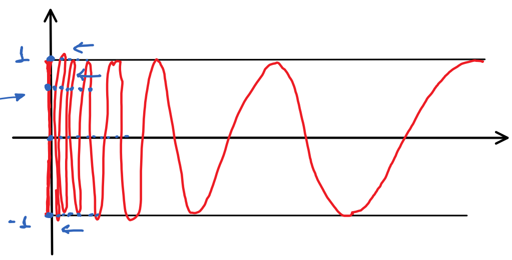
$$\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi} = \frac{2}{(3+4n)\pi}$$

} são todas sequências que se acumulam no 0

Como é este conjunto?

Tomar o fecho "adiciona" o segmento vertical $\{0\} \times [-1, 1]$

ptos. que são lim de sequências neste gráfico



$E = E_1 \cup E_2$

segmento vertical $\{0\} \times [-1, 1]$ — graf. f

Fato 1. E é conexo

Ideia da prova:

① $f: \underset{\text{intervalo real}}{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua $\Rightarrow$ graf. f conexo em $\mathbb{R}^2$

② $A \subset M$ conexo em (M, d) E.M. $\Rightarrow \bar{A}$ conexo

① e ② $\Rightarrow$ conclusão. ∎

Fato 2. E não é conexo por caminhos!!

Ideia da prova: $\gamma: [0,1] \to E$ é caminho contínuo t.q. $\gamma(0) = (0,0) \Rightarrow \text{Im } \gamma \subset E_1$

∴ não é possível ligar ptos. em E_1 e E_2. ∎

Como provar isto? técnica "clássica" p/ conexos:

$$A = \underbrace{\gamma^{-1}}_{\text{pré-imagem}}(E_1) = \{ t \in [0,1] : \gamma(t) \in E_1 \}$$

é { aberto (em [0,1]) ⓐ e fechado (em [0,1]) ⓑ } → No sentido da topologia induzida: $[0,1] \cap$ (aberto de $\mathbb{R}$), $[0,1] \cap$ (fechado de $\mathbb{R}$)

Prova de ⓑ Seguirá que $A = [0,1]$, pois $[0,1]$ é conexo, e, portanto, $\gamma(t) \in E_1 \ \forall t \in [0,1]$

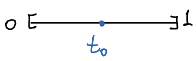
{ E_1 é fechado, γ é contínua } $\overset{\text{caracterização "global" de continuidade (aula de 25/09)}}{\Longrightarrow}$ $\gamma^{-1}(E_1)$ é fechado em [0,1]. // ok!

Prova de ⓐ Precisamos ver que todo pto de A é interior

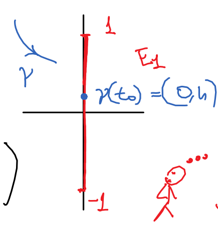
Dado $t_0 \in A$ $\exists \delta > 0$ t.q. $\underbrace{B_\delta(t_0)}_{(t_0-\delta,\, t_0+\delta)} \cap [0,1] \subset A$

$t_0 \in A \Rightarrow \gamma(t_0) = (0, h)$, p/ algum h com $-1 \leq h \leq 1$

Dado $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ t.q.



$t \in [0,1]$ e $|t - t_0| < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^2}(\gamma(t), \gamma(t_0)) < \varepsilon$



$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ onde cada $\gamma_i: [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua.

Temos $\underbrace{(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0,1]}_{\overset{\text{def}}{=} D}$ é conexo ($\cap$ de conexos com um pto em comum t_0)

Ideia:

① t "próx" a $t_0 \Rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t))$ "próx." a $(0, h)$

② se $x(\hat{t}) > 0 \overset{\text{TVI}}{\Rightarrow} \gamma(t)$ "cobre" $[0, x(\hat{t})]$

③ então p/ algum t entre $t_0, \hat{t}$, $y(t) = \pm 1$ cai "longe" de h

$\overset{TVI}{\Rightarrow} \gamma_1(D)$ é um intervalo de $[0,+\infty)$

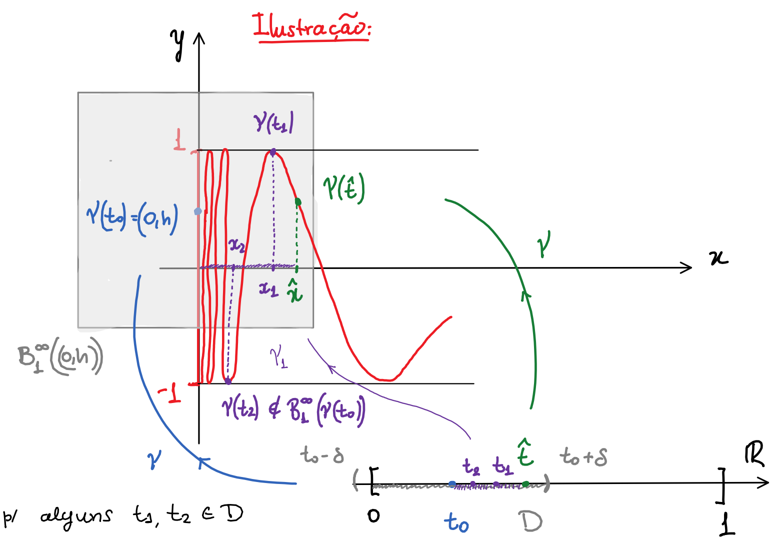
Supomos, por absurdo, que $\exists\, \hat{t} \in D$ t.q. $\gamma(\hat t) \in E_2$

$\therefore\ \gamma_1(\hat t) = \hat x > 0$

Temos que $\exists \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{(1+4n)\pi} \\ x_2 = \dfrac{2}{(3+4n)\pi} \end{cases}$ tais que

$\boxed{0 < x_2 < x_1 < \hat x}$ (tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande)

Ilustração:



Como $\begin{cases} 0 \in \gamma_1(D) \\ \hat x \in \gamma_1(D) \end{cases} \overset{TVI}{\Rightarrow} x_1, x_2 \in \gamma_1(D) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t_1) \\ x_2 = \gamma_1(t_2) \end{cases}$ p/ alguns $t_1, t_2 \in D$

$$\therefore \begin{cases} \gamma(t_1) = \left(\gamma_1(t_1),\ \sin \dfrac{1}{\gamma_1(t_1)}\right) = \left(x_1,\ \sin \dfrac{1}{x_1}\right) = (x_1, 1) \\ \gamma(t_2) = (x_2, -1) \end{cases}$$

Mas, ao menos um dentre $(x_1,1)$ ou $(x_2,-1)$ NÃO pertence à "bola" $B_1^\infty((0,h))$ (dependendo do sinal de h):

Por exemplo: • Se $0 \leq h < 1$: $d_\infty((x_2,-1),(0,h)) = \|(x_2,-1) - (0,h)\|_\infty$
$= \max\{|x_2|, |-1-h|\}$
$\geq |-1-h| = 1+h \geq 1$

• Se $-1 < h < 0$ tem uma conta análoga

Conclusão: $\forall t \in D$, $\gamma(t)$ ñ pode pertencer a $E_2 = $ graf f

$\Rightarrow \gamma(t) \in E_1\ \forall t \in D$

$\Rightarrow t \in A = \gamma^{-1}(E_1)\ \forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) \cap [0,1]$

$\Rightarrow (t_0-\delta, t_0+\delta) \cap [0,1] \subset A$

$\Rightarrow t_0$ é pto interior de A

Como $t_0 \in A$ era qqer., segue que A é aberto em $[0,1]$. // ok!

Segue que: $\begin{cases} A \subset [0,1],\ A \neq \emptyset \\ A \text{ é aberto} \\ A \text{ é fechado} \end{cases} \underset{\text{é convexo}}{\overset{[0,1]}{\Rightarrow}} A = [0,1]$. Portanto, $\gamma^{-1}(E_1) = [0,1]$, ou seja $\gamma(t) \in E_1\ \forall t \in [0,1]$

$\boxed{\text{Logo, é impossível ligar } (0,0) \in E_1 \text{ a um pto. de } E_2 \text{ com } \gamma:[0,1] \to E \text{ contínua}}$

Ou seja, E NÃO é conexo por caminhos! ■