→ objetivo: Aplicar séries de Taylor para avaliar limites e integrais

Exemplos: a) Avaliar $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

Prova: 1) Sabemos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

2) para $x \neq 0$, $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots$

"séries de potências são funções contínuas"

ou seja: se $f(x) = \sum a_n x^n$ $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = \sum a_n a^n$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ //.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{tg^{-1}x - x + \frac{x^3}{3}}{x^5} = \frac{1}{5}$ //

Prova: 1) Sabemos que $tg^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ $x \in [-1, 1]$

2) para $x \neq 0$, $\frac{tg^{-1}x - x + \frac{x^3}{3}}{x^5} = \frac{1}{5} - \frac{x^2}{7} + \dots$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{tg^{-1}x - x + x^3/3}{x^5} = \frac{1}{5}$ //.

c) Avaliar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ como uma série de potências.

Prova: 1) Sabemos ~~$x \in \mathbb{R}$~~ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

2) $\int e^{-x^2} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(n!)}$,

3) $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(n!)}$

d) Avaliar como uma série $\int_0^1 x\cos(x^3)\,dx$

Prova: 1) Sabemos que $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!} \Rightarrow x\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+1}}{(2n)!}$

3) $\int_0^1 x\cos(x^3)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+2}}{(2n)!\,(6n+2)}\Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(6n+2)}$

Nota: os exemplos c) e d) acima mostram que podemos aproximar o valor das integrais tanto como a gente quere. Basta considerar suficientes somas parciais associados a essas séries!!

→ Aplicaços de polinômios de Taylor:

Pela teoria desenvolvida anteriormente sabemos que de fato os polinômios de Taylor associados a uma função f,

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

são uma boa aproximação da função $f(x)$ para $x \in (-d-a, a+d)$ $(d>0)$ (um intervalo ao redor de a).

Assim surge as seguintes perguntas:

1) Quão boa é essa aproximação?
2) Quão grande devemos tomar $\underline{\underline{n}}$ para obter uma precisão desejada?.

→ A solução a essas duas perguntas (desde um ponto de vista analítico) pode ser dado através da desigualdade de Taylor. Pois no final precisaríamos estimar o resto $(R_n(x) \equiv f(x) - T_n(x))$!!

Exemplos: a) Aproxime a funsão $f(x) = e^x$ por um polinomio de Taylor de grau 4 em $x = 0$ (3)

b) Qual é a precisão dessa aproximasão para $x \in (-1,1)$.

Solusão: 1) $T_4(x) \equiv \sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.

Logo $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.

2) pela desigualdade de Taylor temos que o resto na aproximasão $R_4(x) \equiv e^x - T_4(x)$ pode ser estimado como

$$|R_4(x)| \leq \frac{M}{5!} |x|^5 \quad \text{com} \quad |x| < 1$$

e M t.q. $|f^{(5)}(x)| \leq M$ para $|x| < 1$.

$\rightarrow$ Logo como $f^{(5)}(x) = e^x$ e $|e^x| \leq e^x \leq e$ sobre $(-1,1)$

temos que a precisão da aproximasão é

$$|R_4(x)| \leq \frac{e}{5!} |x|^5 \leq \frac{e}{5!} \cdot 1 = \frac{e}{120} \quad //.$$