2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 22 E 23

OBJETIVOS: DISCUTIR MAIS PROPRIEDADES DE TFs E APLICÁ-LAS A EDPs.

(CONT.) 3.3 PROPRIEDADES DE TFs

NOTE QUE AS PROPRIEDADES DE TRANSLAÇÃO E ESCALA ADMITEM VERSÕES "DO MUNDO DE FOURIER PARA O MUNDO ORIGINAL":

- $\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{+ika}\,\tilde{f}(k)$, MAS TAMBÉM

$$\boxed{\mathcal{F}(e^{-iax} f(x)) = \tilde{f}(k-a)}$$

USE A DEFINIÇÃO!

- $\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{|a|}\tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right)$ PARA $a \neq 0$, MAS TAMBÉM $\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}(ak)) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right)}$.

FAÇA $a \to \frac{1}{a}$ E APLIQUE $\mathcal{F}^{-1}$.

(iv) EXISTÊNCIA, RIGOR... DIFÍCIL!!!

EM PRINCÍPIO, TFs DEVERIAM SER DEFINIDAS/APLICADAS SOBRE ELEMENTOS DE L^1 (OU $L^1(\mathbb{R})$), O ESPAÇO DAS FUNÇÕES INTEGRÁVEIS NA RETA REAL,

$$f \in L^1 \iff \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < \infty$$

$|e^{ikx} f(x)| = |f(x)|$.

L^1 É UM ESPAÇO VETORIAL NORMADO SE SEUS ELEMENTOS IGUAIS EM QUASE TODA PARTE FOREM IDENTIFICADOS: DUAS FUNÇÕES IGUAIS EM QUASE TODA PARTE TÊM A MESMA TRANSFORMADA DE FOURIER.

O CARÁTER BIUNÍVOCO DA TRANSFORMAÇÃO DE FOURIER E SUA INVERSIBILIDADE DEPENDE TAMBÉM DE EXTENSÕES ALÉM DE L^1. EMBORA $f \in L^1$ IMPLIQUE QUE $\hat{f}$ SEJA LIMITADA, CONTÍNUA E TAL QUE $\hat{f}(k) \xrightarrow{k \to \pm\infty} 0$,

EM GERAL, $\mathcal{F} \notin L^1$!!! COMO INVERTER?

SERÁ QUE BASTA/RESOLVE CONSIDERARMOS O ESPAÇO $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ DAS FUNÇÕES QUADRADO INTEGRÁVEIS?

$$f \in L^2 \Leftrightarrow \|f\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

NÃO, NÃO ESTA AÍ A SALVAÇÃO, EMBORA SEJA ALTAMENTE DESEJÁVEL PODER CALCULAR A TF PARA $f \in L^2$.

A SALVAÇÃO VEM DO ESPAÇO $\mathcal{S}$ DE SCHWARTZ, DAS FUNÇÕES C^∞ DE RÁPIDO DECRÉSCIMO, JUNTO COM SUAS DERIVADAS (VER AULA 18). $\mathcal{S}$ É UM SUBESPAÇO DENSO NO ESPAÇO COMPLETO L^2, E A TRANSFORMADA $\mathcal{F}$ DE FOURIER REVELA-SE UM ISOMORFISMO BICONTÍNUO EM $\mathcal{S}$.

O QUE ISSO QUER DIZER? TANTO L^2 QUANTO $\mathcal{A}$ SÃO ESTÁVEIS SOB $\mathcal{F}$ (OU SEJA, $f \in L^2 \Rightarrow \hat{f} \in L^2$ E $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{A}$) E QUANDO $f \in L^2$ MAS $f \notin L^1$,

$$\hat{f}(k) \equiv \lim_{R \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{+R} f(x) e^{ikx} dx$$

(OU SEJA, HÁ LIMITES "NATURAIS", COMO ESTE NO SENTIDO DE VALOR PRINCIPAL, QUE NOS "PERMITEM FECHAR OS OLHOS AOS DETALHES" - VER APPEL, FOLLAND E LEMOS).

MAS $\mathcal{A}$ PERMITE UM "MILAGRE" AINDA MAIS IMPRESSIONANTE! COMO TODA FUNÇÃO "É" UMA DISTRIBUIÇÃO E A GRANDE MAIORIA DAS DISTRIBUIÇÕES É TEMPERADA (AULA 18), DEFINE-SE, PARA CADA DISTRIBUIÇÃO TEMPERADA $T \in \mathcal{A}'$ SUA TRANSFORMADA DE

FOURIER $\mathcal{F}T$ MEDIANTE

$$\boxed{\langle \mathcal{F}T, h \rangle \equiv \langle T, \mathcal{F}h \rangle}$$

PARA TODA FUNÇÃO DE SCHWARTZ, $h \in \mathcal{S}$. $\mathcal{F}T$ TAMBÉM É TEMPERADA. NA PRÁTICA? "FECHA OS OLHOS E VAI", CALCULANDO TFs ATÉ DE DISTRIBUIÇÕES "USUAIS", MAS SINGULARES (DESDE QUE TEMPERADAS...).

◇ EXEMPLOS

(i) $\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \delta(k)}$, POIS, SE $h \in \mathcal{S}$,

$$\left\langle \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right), h \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \mathcal{F}(h) \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{h}(k)\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(k)\, e^{-ik.0}\, dk =$$

$$= h(0) = \langle \delta, h \rangle \quad \therefore \mathcal{F}(1/\sqrt{2\pi}) = \delta$$

SIMBOLICAMENTE, $\delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\, dx$ OS

$$\therefore \quad \boxed{\delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,dx}$$

IMPORTANTE!!! MAS NÃO EXISTE!!!

SÓ FAZ SENTIDO QUANDO INTEGRADO.

NOTE QUE $\delta_n(k) \equiv \frac{\sin(nk)}{k.\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{+n} e^{ikx}\,dx$

É TAL QUE $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)\,\delta_n(k)\,dk = f(0)$.

NÃO PODE ENTRAR!

(ii) $\boxed{\mathcal{F}(\delta(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$, POIS, RIGOROSA-

MENTE, $\forall\, h \in \mathcal{S}$,

$$\langle \tilde{\delta}, h \rangle = \langle \delta, \tilde{h} \rangle = \tilde{h}(0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, e^{+i.0.x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, h(x)\,dx$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, h \right\rangle. \quad \text{SIMBOLICAMENTE,}$$

$$\tilde{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, e^{ikx}\,dx = \frac{e^{ik.0}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

• NOTE QUE $\boxed{\delta(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm 2\pi i k x}\, dx}$,

DE MODO QUE AS CONVENÇÕES <u>ALTER-NATIVAS</u>

$$\begin{cases} \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{\pm 2\pi i k x}\, dx \\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{\mp 2\pi i k x}\, dk \end{cases}$$

→ FUNÇÃO CTE 1

TORNARIAM $\mathbb{1}: x \mapsto 1$ (E NÃO $1/\sqrt{2\pi}$)

E δ UM PAR CONJUGADO DE FOURIER.

(iii) $\boxed{\mathcal{F}(e^{-i\omega_0 t}) = \delta(\omega - \omega_0).\sqrt{2\pi}}$,

POIS $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_0 t}.e^{+i\omega t}\, dt =$

$$= \sqrt{2\pi} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i(\omega-\omega_0)t}\, dt \right\}}_{= \delta(\omega-\omega_0)}$$

A TF SÓ CONTÉM A FREQUÊNCIA ω_0

DO SINAL ORIGINAL! NOTE QUE

$$\mathcal{F}\left(\frac{\cos \omega_0 t}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{2}\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

E

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin \omega_0 t}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{2i}\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right].$$

EM (i), VIMOS QUE UM SINAL CONSTANTE CONTÉM APENAS A FREQUÊNCIA NULA, $\omega_0 = 0$.

EM (ii), VIMOS QUE O SINAL SINGULAR δ CONTÉM <u>TODAS</u> AS FREQUÊNCIAS ($\tilde{\delta}(k) = CTE \neq 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$). É POR ISSO QUE SE DENOMINA "RUÍDO BRANCO" QUALQUER HIPÓTESE DE COVARIÂNCIA ESTATÍSTICA DO TIPO $\langle X(t).X(t')\rangle = \delta(t-t')$.

(FIM DOS EXEMPLOS) ◇

(9) SUAVIDADE E DERIVADAS DE TFs

UM PRINCÍPIO BÁSICO DA TEORIA DA TF É QUE, QUANTO MAIS SUAVE FOR f, MAIS RAPIDAMENTE $\tilde{f}$ DECAIRÁ NO INFINITO, E VICE-VERSA.

PORÉM, É FUNDAMENTAL PERCEBER QUE, NO SENTIDO DA TF DE DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS, A SUAVIDADE É OBTIDA DAS FUNÇÕES DE SCHWARTZ $h \in \mathcal{S}$ ATUADAS PELAS DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS $T_f \in \mathcal{S}'$, E NÃO POR EVENTUAIS "NÚCLEOS DE INTEGRAÇÃO" f DE REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS

$$\langle T_f, h \rangle = \int f(x)\, h(x)\, dx .$$

$\tilde{T}_f$ EXISTE MESMO QUE f NÃO SEJA SUAVE NEM DECAIA EM $\pm\infty$.

TEOREMA: SE $h \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\boxed{\mathcal{F}[h^{(n)}(x)] = (-ik)^n \cdot \tilde{h}(k)}$$

E

$$\boxed{\mathcal{F}[(ix)^n \cdot h(x)] = \tilde{h}^{(n)}(k)}$$

.

□ IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO:

- $\mathcal{F}[h'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h'(x) e^{ikx} dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[h(x) e^{ikx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (ik) h(x) e^{ikx} dx \right\}$

$\left[h(x) e^{ikx} \right]_{-\infty}^{+\infty} \to 0 \rightsquigarrow h \in \mathcal{Q}$

$= (-ik) \tilde{h}(k)$.

- $\mathcal{F}[(ix)h(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ix\, h(x) e^{ikx} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial k} \left[h(x) e^{ikx} \right] dx$

$= \frac{d}{dk} \left[\tilde{h}(k) \right]$

□

TEOREMA: SE $T \in \mathcal{S}'$, $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\boxed{\mathcal{F}(T^{(n)}) = (-iK)^n \cdot \mathcal{F}(T)} \quad (*)$$

E

$$\boxed{\mathcal{F}[(ix)^n \cdot T] = [\mathcal{F}(T)]^{(n)}} \quad (**)$$

□ DEMONSTRAÇÃO: $\forall h \in \mathcal{S}$,

$$\langle \mathcal{F}(T^{(n)}), h \rangle = \langle T^{(n)}, \tilde{h} \rangle =$$

$$= (-1)^n \langle T, \tilde{h}^{(n)} \rangle$$

$$= (-1)^n \left\langle T, \mathcal{F}[(ix)^n \cdot h(x)] \right\rangle$$

ÍNDICE MUDO

$$= \langle \mathcal{F}(T), (-iK)^n h(K) \rangle$$

$\alpha \in C^\infty$

$$= \langle (-iK)^n \mathcal{F}(T), h \rangle \quad (*)$$

(**) É ANÁLOGA! □

MORAL: $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$