PTC3420 - Programação Matemática - 1a. PROVA - 13/10/2020

1a. QUESTÃO - Valor: 2,0 - Uma pequena fábrica de papel toalha manufatura três tipos de produtos A, B e C. A fábrica recebe o papel em grandes rolos, e executa 3 operações: o papel é cortado, dobrado e empacotado. O lucro unitário de cada produto é respectivamente R$ 1,00, R$ 1,50, e R$ 2,00. O quadro abaixo identifica o tempo requerido para cada operação (em horas), bem como a quantidade de máquinas disponíveis, que trabalham 40 horas por semana. Deseja-se obter o planejamento da produção semanal da fábrica de forma a maximizar o lucro.

Seção	Produto A	Produto B	Produto C	Qde. Máquina
Corte	2	5	2	3
Dobra	4	10	4	10
Empacotamento	1	1	2	2

a) Escreva o problema como um problema de programação linear.

b) Obtenha a solução ótima através do método Simplex na forma tableau (apresente todos os passos até chegar no tableau ótimo).

c) Identifique pelo tableau final a matriz base ótima B e sua inversa B^{-1}.

2a. QUESTÃO - Valor: 2,0 - Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} max\ \ \mu x_1 &+ x_2 \\ \text{sujeito a } -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Represente graficamente a região factível em $\mathbb{R}^2$.

b) Introduza as variáveis de folga e escreva a matriz A do sistema $Ax = b$. Qual é o número máximo de soluções básicas desse sistema?

c) Determine os pontos extremos e direções extremas do conjunto. Para cada ponto extremo determine as variáveis básicas e não básicas.

d) Determine as soluções ótimas (caso exista alguma) para cada um dos casos abaixo. Justifique a sua resposta.

d.1) $-2 < \mu$

d.2) $\mu = -2$

3a. QUESTÃO - Valor: 2,0: Considere o seguinte sistema dinâmico escalar:

$$x(k+1) = \frac{1}{2}x(k) + 2u(k), \quad x(0) = 8.$$

Deseja-se obter os controles $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ de forma a levar o sistema para $x(3) = 0$, minimizando $z = |u(0)| + |u(1)| + |u(2)|$.

a) Escreva o problema como um problema de PL.

b) Resolva o problema de PL e obtenha o controle ótimo desse problema, e o valor da função objetivo ótima z.

c) Escreva os valores de $x(k)$, $k = 1, 2, 3$, quando se usa o controle ótimo do item b).

4a. QUESTÃO - Valor: 2,0 - Considere o seguinte conjunto de restrições

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq b_3 \end{aligned} \tag{2}$$

Após a introdução das variáveis de folga x_3, x_4, x_5 (x_3 para a 1^a restrição, etc), e uma série de pivotações, o tableau tomou a seguinte forma:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	$2/3$	$1/3$	0	$14/3$
0	1	$-1/3$	$1/3$	0	$2/3$
0	0	1	0	1	6

a) Identifique as variáveis básicas e não básicas, e a solução básica correspondente.

b) Determine $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{12}, b_1, b_2, b_3$ (ou seja, os coeficientes das restrições indicadas em (2)).

c) Esboce no plano (x_1, x_2) a região representada pelas restrições (2) com $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

d) Identifique os pontos extremos do item c) e, em particular, indique o ponto extremo correspondente ao tableau indicado acima.

e) Obtenha o ótimo do problema

$$maximizar \;\; x_1 + x_2$$

sujeito às restrições (2) e $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

5a. QUESTÃO - Valor: 2,0 - Apresenta-se abaixo o tableau simplex atual de um problema de minimização. As restrições são do tipo $\leq$ e as variáveis de folga são x_3, x_4 e x_5.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	u_1	0	u_2	0	u_6
1	-2	0	4	0	u_3
0	-1	1	5	0	u_4
0	0	0	7	1	u_5

a) Suponha que $u_1 < 0$, $u_2 \leq 0$, e que $u_3 \geq 0, u_4 \geq 0, u_5 \geq 0$. Neste caso

a.1) O tableau atual é ótimo? Justifique.

a.2) Obtenha a matriz A, a base B do tablaeu acima, e B^{-1}.

b) Suponha agora que $u_1 > 0$, $u_2 \leq 0$, e que $u_3 \geq 0, u_4 \geq 0, u_5 \geq 0$. Neste caso

b.1) O tableau atual é ótimo? Justifique.

b.2) Determine uma direção extrema.

b.3) Seja $u_1 = 5$, $u_3 = 1, u_4 = 2, u_5 = 4$ e $u_6 = -10$. Determine uma solução factível (não básica) com $z = -200$.