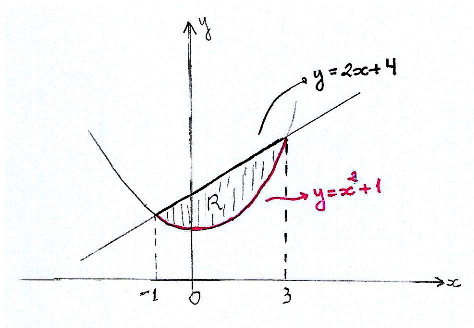
Prova P1 de MAT-121 - Cálculo Diferencial e Integral II

Justifique suas afirmações.

(1) (1,0 ponto) Esboce a região R no plano xy e calcule a sua área:
$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 \leq \ y \leq \ 2x + 4 \ \}$

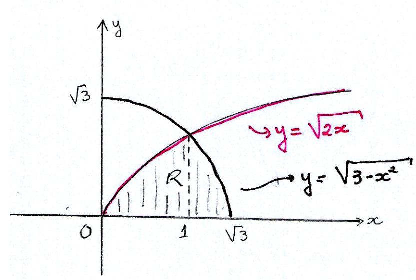


$x^2 + 1 = 2x + 4 \longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \longleftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$

Vamos designar por $A(R)$ a área da região R. Temos:

$$A(R) = \int_{-1}^{3} [(2x + 4) - (x^2 + 1)]dx = \int_{-1}^{3} (2x - x^2 + 3)dx = \frac{32}{3}$$

(2) (1,5 pontos) Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \ 0, \, x^2 + y^2 \leq \ 3, \, 0 \leq \ y \leq \sqrt{2x}\}$.
Esboce a região R no plano xy e determine o volume do sólido que se obtém por rotação de R em torno do eixo x.

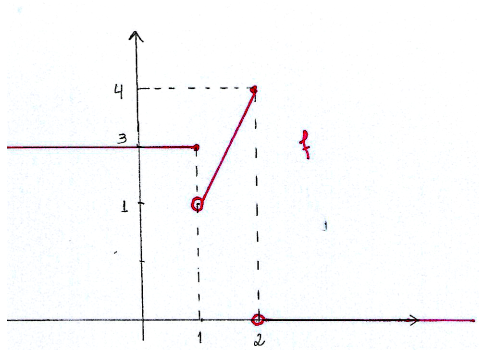


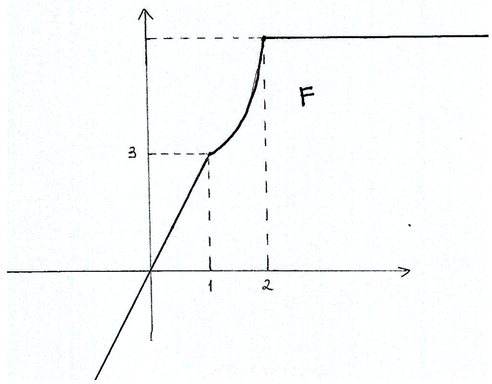
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y = \sqrt{2x} \\ x \geq \ 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad x = 1$$

Vamos designar por V o volume do slido obtido por rotação da região R em torno do eixo x. Temos:

$$V = \pi \int_{0}^{1} (\sqrt{2x})^2 dx + \pi \int_{1}^{\sqrt{3}} (\sqrt{3 - x^2})^2 dx = \pi \int_{0}^{1} 2x dx + \int_{1}^{\sqrt{3}} (3 - x^2)dx = 2\pi\sqrt{3} - \frac{5\pi}{3}$$

(3) (2,0 pontos) Esboce os gráficos das funções f e F e estude a função F quanto à diferenciabilidade.





$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{se } t \leq 1 \\ 2t & \text{se } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{se } t > 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

$$\begin{cases} \text{Para } x \leq 1, \text{ temos } F(x) = \int_0^x 3dt = 3x \\ \text{Para } 1 \leq x \leq 2, \text{ temos } F(x) = \int_0^1 3dt + \int_1^x 2tdt = 3 + (x^2 - 1) = x^2 + 2 \\ \text{Para } x \geq 2, \text{ temos } F(x) = \int_0^1 3dt + \int_1^2 2tdt + \int_2^x 0dt = 3 + 4 - 1 = 6 \end{cases}$$

Portanto,

$$F(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 6 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Como f é contínua para todo $x \neq 1$ e $x \neq 2$, vale que, nestes pontos, F é diferenciável. Além disso, $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \notin \{1, 2\}$, isto é:

$$F'(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 1 \\ 2x & \text{se } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Vamos analisar a diferenciabilidade de F nos pontos 1 e 2.

Para $x = 1$:

$$F'(1)_- = \lim_{x \to 1-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \frac{3x - 3}{x - 1} = 3$$

$$F'(1)_+ = \lim_{x\to 1+} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \frac{(x^2+2)-3}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

Como $F'(1)_- \neq F'(1)_+$, F não é derivável em 1.

Para $x=2$:

$$F'(2)_- = \lim_{x\to 2-} \frac{F(x)-F(2)}{x-2} = \frac{(x^2+2)-6}{x-2} = 4$$

$$F'(2)_+ = \lim_{x\to 2+} \frac{F(x)-F(2)}{x-2} = \frac{6-6}{x-2} = 0$$

Como $F'(2)_- \neq F'(2)_+$, F não é derivável em 2.

(4) (1,0 ponto) Calcule $F'(x)$, sendo $F(x) = \int_{2x^2+1}^{x^3+4x} e^{t^2} dt$

Pelo Teorema fundamental do Cálculo e a regra da cadeia, temos que

$$F'(x) = (e^{(x^3+4x)^2}).(x^3+4x)' - e^{(2x^2+1)^2}.(2x^2+1)'$$

e portanto,

$$F'(x) = (e^{(x^3+4x)^2}).(3x^2+4) - (e^{(2x^2+1)^2}).4$$

(5) (1,0 ponto) Calcule $\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \frac{1}{1+16x^2} dx$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \frac{1}{1+16x^2} dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{\frac{1}{4}}^{c} \frac{1}{1+16x^2} dx$$

Vamos calcular $\int \frac{1}{1+16x^2} dx$

$$\begin{cases} u = 4x \\ du = 4dx \ \rightarrow \ \ dx = \dfrac{du}{4} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+16x^2} dx = \int \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{4} = \frac{1}{4} arctg u + k = \frac{1}{4} arctg(4x) + k$$

Dessa forma,

$$\int_{\frac{1}{4}}^{c} \frac{1}{1+16x^2} dx = \frac{arctg(4c) - arctg(4.\frac{1}{4})}{4} = \frac{arctg(4c) - arctg 1}{4}$$

e portanto,

$$\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \frac{1}{1+16x^2} dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{arctg(4c) - arctg 1}{4} = \frac{1}{4}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{16}$$

(6) (2,0 pontos) Estude a convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias:

(a) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{4x-2}{7x^3+4x^2+5}dx$ (b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x^4+4}{x^5+3x^3+8}dx$

(a) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{4x-2}{7x^3+4x^2+5}dx$

Temos:

$0 \leq \dfrac{4x-2}{7x^3+4x^2+5} \leq \dfrac{4x}{7x^3} = \dfrac{4}{7x^2}$ e $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{4}{7x^2}dx$ converge.

Pelo critério de comparação, concluimos que a integral dada também é convergente.

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x^4+4}{x^5+3x^3+8}dx$

Temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^4+4}{x^5+3x^3+8}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5+4x}{x^5+3x^3+8} = 3 > 0.$$

Pelo critério de comparação pelo limite, como $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge, vale o mesmo para a integral dada: ela é divergente.

(7) (1,5 pontos)Determine uma parametrização para a curva dada por interseção do cilindro $3x^2+4y^2 = 12$ com o plano $z = 1-x-2y$, e a reta tangente a esta curva no ponto $(1, \frac{3}{2}, -3)$.

Temos que :

$3x^2 + 4y^2 = 12 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

A projeção de todo ponto (x, y, z) da curva no plano xy cai sobre a base do cilindro, que é a elipse de equação dada. Assim, temos que

$$\begin{cases} x = 2cost \\ y = \sqrt{3}sent \end{cases}$$

Mas todo ponto (x, y, z) da curva está no plano $z = 1 - x - 2y$ e portanto, uma vez escritos x e y em função do parâmetro t, z fica determinado: $z = 1 - 2cost - 2\sqrt{3}sent$.

Temos, assim, a seguinte parametrização:

$\gamma(t) = (2cost, \sqrt{3}sent, 1 - 2cost - 2\sqrt{3}sent)$

Em particular, $\gamma(\dfrac{\pi}{3}) = (1, \dfrac{3}{2}, -3)$

Além disso,

$\gamma'(t) = (-2sent, \sqrt{3}cost, 2sent - 2\sqrt{3}cost)$, e portanto, $\gamma'(\frac{\pi}{3}) = (\frac{-2\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Logo, a reta tangente à curva no ponto dado tem equação

$X = \gamma(\frac{\pi}{3}) + \lambda\gamma'(\frac{\pi}{3})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

e obtemos

$(x, y, z) = (1, \frac{3}{2}, -3) + \lambda(\frac{-2\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

O vetor $(\frac{-2\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ é paralelo ao vetor $(-2, 1, 0)$, e podemos escrever ainda, para a equação da reta tangente,

$(x, y, z) = (1, \frac{3}{2}, -3) + \lambda(-2, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.