SME 141
Assunto: Álgebra Linear
Aula AL-7 – Transformações lineares

Prof. Miguel Frasson

Outubro de 2020

Transformações

Sejam U, V dois conjuntos não vazios e uma função $F : U \to V$.

- Em Álgebra Linear, funções também são chamadas de transformações ou aplicações.
- O elemento $F(x)$ chama-se imagem de x por F.
- O conjunto U chama-se domínio e V o contra-domínio de F.
- O conjunto $\text{graf}(F) = \{(u, F(u)) : u \in U\}$ chama-se gráfico de F.
- Dado $A \subset U$, o conjunto $F(A) = \{F(u) : u \in A\}$ chama-se imagem de A por F.
- se $A = U$, então o conjunto $F(U)$ chama-se imagem de F (neste caso, também usamos a notação $\text{Im}(F)$).
- Dado $B \subset V$, o conjunto $F^{-1}(B) = \{u \in U : F(u) \in B\}$ chama-se imagem inversa de B por F.

Transformações injetoras e sobrejetoras

Seja $F : U \to V$ uma aplicação.

- F é dita injetora se, quaisquer que sejam $u_1, u_2 \in U$ com $u_1 \neq u_2$, tem-se $F(u_1) \neq F(u_2)$,
  ou, equivalentemente, quando
  $F(u_1) = F(u_2) \implies u_1 = u_2 \in U$.
- F é dita sobrejetora quando $F(U) = V$.
- Uma aplicação injetora e sobrejetora é chamada bijetora.

Exemplos

- Seja U um conjunto não vazio. A transformação identidade $I_U : U \to U$, tal que $I_U(x) = x$, $\forall x \in U$, é bijetora.
- A aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, -y)$ é bijetora.
- A rotação de ângulo θ, $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$R_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, y \cos\theta + x \operatorname{sen}\theta)$$

  também é bijetora. ($R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$)
- Seja $a \in \mathbb{R}^2$ fixado. A translação $T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = x + a$ é bijetora.

Função invertível

- Sejam duas aplicações $F : A \to B$ e $G : B \to C$
- A composta de F e G, $G \circ F : A \to C$, é definida por:

$$(G \circ F)(u) = G(F(u)).$$

- Uma aplicação $F : A \to B$ é dita invertível quando existe $G : B \to A$ tal que $G \circ F = I_U$ e $F \circ G = I_V$.
- A aplicação G chama-se inversa de F e é denotada por F^{-1}.
- Teorema: F é invertível se e somente se F é bijetora.

Transformações lineares

Sejam U, V espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação. Dizemos que T é uma transformação linear quando:

- $T(u + v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in U$
- $T(\alpha u) = \alpha T(u), \quad \forall \alpha \in K, u \in U.$

Quando $U = V$, diremos que T é um operador linear.

Exemplos de transformações lineares

Transformação nula

$O : U \to V$, $O(x) = 0 \in V$ é linear:

- $O(u + v) = 0 = 0 + 0 = O(u) + O(v)$
- $O(\alpha u) = 0 = \alpha 0 = \alpha O(u)$

O não é nem injetora, nem sobrejetora.

Homotetia de razão $k \in \mathbb{R}$

$H : U \to U$ dada por $H(u) = ku$ é linear:

- $H(u + v) = k(u + v) = ku + kv = H(u) + H(v)$
- $H(\alpha u) = k\alpha u = \alpha k u = \alpha H(u)$

Se $k \neq 0$, H é bijetora.

Exemplos de transformações lineares

A transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + y, x + 5y - z)$ é linear, sobrejetora, mas não injetora.

$$\begin{aligned}
T[(a, b, c) + (d, e, f)] &= T(a + d, b + e, c + f) \\
&= (2(a + d) + b + e, a + d + 5(b + e) - (c + f)) \\
&= (2a + b, a + 5b - c) + (2d + e, d + 5e - f) \\
&= T(a, b, c) + T(d, e, f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T[\alpha(a, b, c)] &= T(\alpha a, \alpha b, \alpha c) = (2\alpha a + \alpha b, \alpha a + 5\alpha b - \alpha c) \\
&= \alpha(2a + b, a + 5b - c) = \alpha T(a, b, c).
\end{aligned}$$

- Estudar se T é sobrejetora e injetora é analisar um sistema linear (exercício).

Matrizes de transformações lineares

- No exemplo anterior, se $(s, t) = T(x, y, z)$, então temos

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$
- Note que para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a matriz coluna $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é a matriz de coordenadas de (x, y, z) (na base canônica).
- Analogamente, $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ é a matriz de coordenadas de (s, t) (na base canônica).
- Vamos escrever $Tu = Au$
- A a matriz da transformação lineat T (na base canônica).

Uma matriz determina uma transformação linear

Dada A matriz $n \times m$, podemos definir uma trasformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$:

- um vetor coluna u com m linhas são coornanadas de um elemento de $\mathbb{R}^m$
- $T(u) = Au$ define uma transformação linear:
  - $T(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T(u) + T(v)$
  - $T(\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha T(u)$
- $A_{n\times m}u_{m\times 1} = (Au)_{n\times 1}$ é vetor coluna, que é coordenada de elemento de $\mathbb{R}^n$.

Matrizes de transformações lineares

- Então, dada A matriz, definimos uma trnasformação linear.
- Também, dada uma transformação linear $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, podemos definir uma matriz tal que $F(u) = Au$.
- A i-ésima coluna de A são as coordenadas de $F(e_i)$.

Exemplo: $T(x, y, z) = (2x + y, x + 5y - z)$

$T(1, 0, 0) = (2, 1), \quad T(0, 1, 0) = (1, 5), \quad T(0, 0, 1) = (0, -1)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + 5y - z \end{bmatrix}$$

Exemplo em $P_3(\mathbb{R})$: operador derivada

Seja $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definido por $Dp(x) = p'(x)$:

$$D(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2 \quad (+0x^3)$$

- Usando a base canônica de $P_3(\mathbb{R})$, podemos encontrar a matriz da transformação D:
  - $D(1) = 0, \quad D(x) = 1, \quad D(x^2) = 2x, \quad D(x^3) = 3x^2$
  - $[D(1)] = [0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x)] = [1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

    $[D(x^2)] = [2x] = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D(x^3)] = [3x^3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Teorema: propriedades de transformações lineares

Sejam U, V espaços vetoriais e seja $T : U \to V$ uma aplicação linear.

- $T(0) = 0$ (T leva o vetor nulo de U no vetor nulo de V)
- $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.
- Se $F : U \to V$ e $G : V \to W$ forem transformações lineares, então a composta $G \circ F : U \to W$ também é linear.

(demonstração na "lousa")

Transformações e subespaços vetoriais

Teorema

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear:

- Se W for um subespaço de U então $T(W)$ é subespaço de V.
- Se Z for um subespaço de V então $T^{-1}(Z)$ é subespaço de U.

(demonstração na “lousa”)

Transformações são determinadas pelos valores numa base

Teorema

Sejam U e V espaços vetoriais e $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U. Se $S, T : U \to V$ são transformações lineares tais que

$$S(u_1) = T(u_1), \ldots, S(u_n) = T(u_n),$$

então $S(x) = T(x), \quad \forall x \in U$.

Demonstração

- Seja $x \in U$.
- Como B é uma base de U, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.
- Como S e T são lineares e $S(u_i) = T(u_i)$,

$$S(x) = S(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 S(u_1) + \cdots + \alpha_n S(u_n)$$
$$= \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = T(x)$$

- Logo, S coincide com T.