# Sistemas Inteligentes

## UNIDADE 7 – Sistemas Fuzzy
## (Introdução à Lógica Fuzzy)

Prof. Ivan Nunes da Silva

# *1. Introdução aos Sistemas Fuzzy*
### *Principais características dos sistemas fuzzy*

- Exploram a riqueza da informação:
  - Informações qualitativas.
  - Redes neurais artificiais só trabalha com informações quantitativas.
- Permitem expressar imprecisões e incertezas (Exemplo da Churrascaria).
- O raciocínio é executado de forma aproximada (não exata).
- Independem da modelagem matemática.
- Sistemas baseados em regras linguísticas.

# 1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

*Vantagens dos sistemas fuzzy*

- Conceitualmente fácil de ser entendido.
- Flexibilidade explícita pela tolerância à imprecisão de dados.
- Modelagem não-linear de processos com complexidade arbitrária.
- Construído baseado na experiência dos especialistas.
- Pode ser integrado com outras ferramentas convencionais.
- Baseado em linguagem natural.

3

# 1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

*O conceito de inexatidão*

- O cérebro humano processa informações inexatas de forma direta:
  - Hoje está **mais ou menos** quente.
  - O show é **meio** caro.
  - Aquele rapaz é **baixinho.**
  - Coloque **um pouco** (uma pitada) de sal.
  - A tensão está **muito alta**.
  - Picanha **bem passada.**
- Mas, paradoxalmente, não há incerteza sobre a eventual quantificação do valor que se quer representar (ou repassar a ideia).
- O problema é como definir "linguisticamente" esse valor.

4

# 1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

## *Exemplo do jogo de golfe*

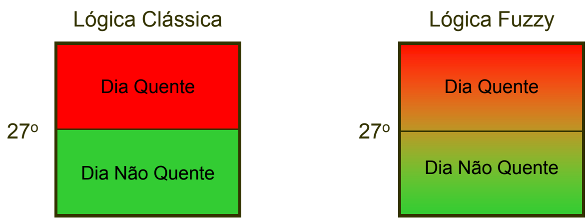
- Se a bola está **longe** do buraco e o terreno está **levemente inclinado** da esquerda para direita, bata na bola **fortemente** e numa direção **um pouco a esquerda** da bandeira.
- Se a bola está **muito perto** do buraco e o terreno é **plano**, bata na bola **suavemente** e **diretamente na direção** do buraco.
- Como se pode definir a distância:
  - **Muito Perto:** menor que 1 metro
  - **Perto:** entre 1 e 3 metros
  - **Médio:** entre 3 e 5 metros
  - **Longe:** entre 5 e 7 metros
  - **Muito Longe:** maior que 7 metros
- Como classificar a distância 4.99m?
- Intuitivamente, sabe-se que 4.99 está mais para "**Longe**" do que para "**Médio**".

5

# 1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

## *Lógica clássica e lógica fuzzy*

- Na **lógica clássica tradicional** (teoria de conjuntos), as fronteiras dos conjuntos são bem definidas.
- Na **lógica fuzzy** (nebulosa), essas fronteiras não são bem definidas, sendo então flexíveis.

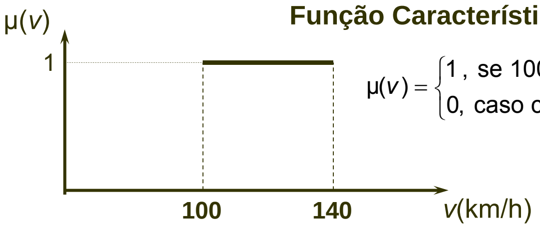



6

# 2. Conceitos de Lógica Clássica

***Resumo da lógica clássica de conjuntos***

- Na lógica clássica (booleana, binária, Aristóteles), os objetos **pertencem** ou **não** a uma determinada classe ou a um determinado conjunto.
- A resposta se resume a “Sim” ou “Não”, “Verdadeiro” ou “Falso”, 0 ou 1, etc.
- **Exemplo**:
  - Seja o seguinte gráfico denotando o conceito de “**Velocidade Alta**”.




**Função Característica (Inclusão):**

$$\mu(v)=\begin{cases}1, & \text{se } 100\le v\le 140\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$$

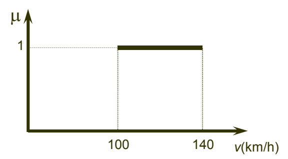
- Qual a resposta da função característica para uma velocidade de 99,9999 km/h?
- A imprecisão e a incerteza do mundo real acaba restringindo a aplicação da lógica clássica em problemas do dia-a-dia.

7

# 2. Conceitos de Lógica Clássica

***Aspectos comparativos***

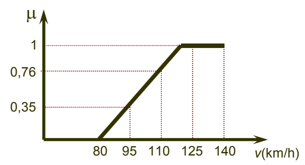
- Representação gráfica do conceito de **“Velocidade Alta”:**




## Lógica Clássica

***objetos pertencem ou não a uma determinada classe***

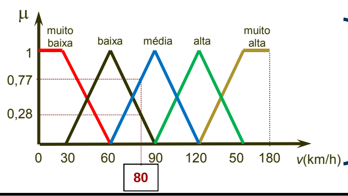
***(como tratar paradoxos? Monte de areia, mentiroso, todo-poderoso, desconhecido, barbeiro, etc)***




## Lógica Fuzzy

***objetos podem pertencer mais (ou menos) a uma determinada classe***

***(não é probabilidade! Exemplo das garrafas do gênio)***




## Sistema Fuzzy

***Variáveis representadas por funções de pertinência***

8

# 3. Conceitos de Lógica Fuzzy

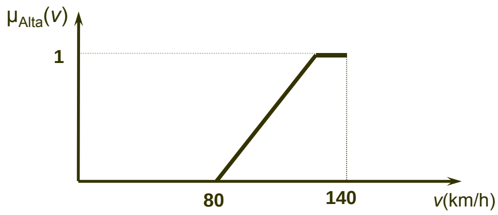
## *Função de pertinência na lógica fuzzy*

- Na lógica fuzzy, a ideia da função de inclusão é então flexibilizada, indicando que os objetos podem pertencer mais, ou menos, a um determinado conjunto.
- Neste caso, a função de inclusão ao conjunto fuzzy, ou **função de pertinência**, é dada pela seguinte expressão:

$$\mu_A(x):\ x \rightarrow [0,\ 1]\ ;\ \text{onde } x \in X$$

  - onde $\mu_A(x)$ retorna o **grau de pertinência** do elemento $x$, pertencente ao **universo de discurso** $X$, em relação ao **conjunto fuzzy** $A$.

- Como exemplo, considera-se aqui na figura um conjunto fuzzy que define o conceito de velocidade alta.






# 3. Conceitos de Lógica Fuzzy

## *Terminologia para representar conjuntos fuzzy*

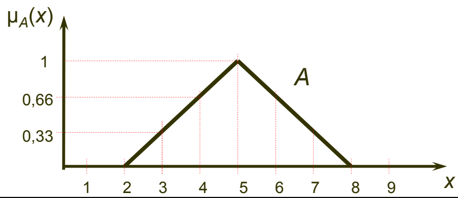
- Em termos de implementação computacional, os conjuntos fuzzy são normalmente representados de maneira discreta.
- Para um conjunto fuzzy $A$, discreto e finito, tendo elementos definidos em um universo de discurso $X$, o mesmo conjunto pode ser denotado da seguinte forma:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \mu_A(x_3)/x_3 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n$$

  - Onde o sinal de adição indica a composição de todos elementos do conjunto $A$, e $n$ especifica a quantidade de elementos de discretização.
  - Então, cada termo $\mu_A(x_i)/x_i$ fornece o grau de pertinência $\mu_A(x_i)$ do elemento $x_i$ em relação ao conjunto fuzzy $A$.

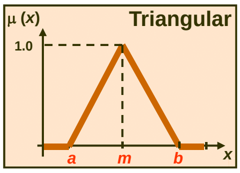
- Como exemplo, o conjunto fuzzy $A$, dado pela função de pertinência ilustrada no gráfico, poderia ser representado por:

$$A = 0{,}0/1 + 0{,}0/2 + 0{,}33/3 + 0{,}66/4 + 1{,}0/5 + 0{,}66/6 + 0{,}33/7 + 0{,}0/8 + 0{,}0/9$$

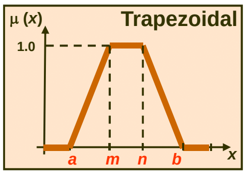


# 3. Conceitos de Lógica Fuzzy

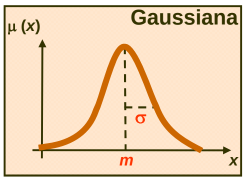
### *Principais tipos de funções de pertinência*




$$\mu(x)=\begin{cases}0, \text{ se } x \le a\\ \dfrac{x-a}{m-a}, \text{ se } x \in [a,\ m]\\ \dfrac{b-x}{b-m}, \text{ se } x \in [m,\ b]\\ 0, \text{ se } x \ge b\end{cases}$$




$$\mu(x)=\begin{cases}0, \text{ se } x \le a\\ \dfrac{x-a}{m-a}, \text{ se } x \in [a,\ m]\\ 1, \text{ se } x \in [m,\ n]\\ \dfrac{b-x}{b-n}, \text{ se } x \in [n,\ b]\\ 0, \text{ se } x \ge b\end{cases}$$




$$\mu(x)=e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

11

# 4. Operações com Conjuntos Fuzzy

### *União entre conjuntos fuzzy*

## Conjunto UNIÃO

- O conjunto **UNIÃO**, entre dois conjuntos fuzzy *A* e B, pertencentes a um mesmo universo de discurso *X*, é formado por todos os valores **máximos** entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. Formalmente, tem-se:

$$\mu_A(x)\cup\mu_B(x)=\max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

- Generalizando, para uma coleção de *m* conjuntos fuzzy, todos definidos num mesmo universo de discurso *X*, tem-se:

$$\bigcup_{i=1}^{m}\mu_{A_i}(x)=\max\{\mu_{A_1}(x),\ \mu_{A_2}(x),\ldots,\mu_{A_m}(x)\}$$

- Outros operadores de **UNIÃO**:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Soma Algébrica} \Rightarrow & \mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\\ \text{Soma Limitada} \Rightarrow & \min\{1,\ \mu_A(x)+\mu_B(x)\}\\ \text{Soma Drástica} \Rightarrow & \begin{cases}\mu_A(x), \text{ se } \mu_B(x)=0\\ \mu_B(x), \text{ se } \mu_A(x)=0\\ 1, \text{ caso contrário}\end{cases}\end{array}\right\}\ \textit{S-normas}$$

**Qual a vantagem de se utilizar o operador "Máximo" na União?**

12

# 4. Operações com Conjuntos Fuzzy

*Interseção entre conjuntos fuzzy*

## Conjunto INTERSEÇÃO

- O conjunto **INTERSEÇÃO**, entre dois conjuntos fuzzy *A* e *B*, pertencente a um universo de discurso *X*, é formado por todos os valores **mínimos** entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. Formalmente, tem-se:

$$\mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

- Generalizando, para uma coleção de *m* conjuntos fuzzy, todos definidos num mesmo universo de discurso *X*, tem-se:

$$\bigcap_{i=1}^{m} \mu_{A_i}(x) = \min\{\mu_{A_1}(x),\ \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_m}(x)\}$$

- Outros operadores de **INTERSEÇÃO**:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Produto Algébrico} \Rightarrow & \mu_A(x)\cdot\mu_B(x) \\ \text{Produto Limitado} \Rightarrow & \max\{0,\ \mu_A(x)+\mu_B(x)-1\} \\ \text{Produto Drástico} \Rightarrow & \begin{cases} \mu_A(x), \text{ se } \mu_B(x)=1 \\ \mu_B(x), \text{ se } \mu_A(x)=1 \\ 0\ , \text{ caso contrário} \end{cases} \end{array}\right\} \textbf{\textit{T}-normas}$$

**Qual a vantagem de se utilizar o operador "Mínimo" na Interseção?**

13

# 4. Operações com Conjuntos Fuzzy

*Conjunto complemento, S-Norma e T-Norma*

## Conjunto COMPLEMENTO

- O conjunto **COMPLEMENTO** de um conjunto nebuloso *A*, pertencente a um universo de discurso *X*, é formado pela subtração de $\mu_A(x)$ do valor unitário 1. Formalmente, tem-se:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

## Operador *S*-Norma

- Uma ***S***-norma (co-norma triangular) é uma operação matemática binária, ***S***: [0,1] x [0,1]→ [0,1], que deve satisfazer as seguintes propriedades:
  1. *x* ***S*** 1 = 1, sendo que *x* ***S*** 0 = *x* **(Condição de contorno)**
  2. *x* ***S*** *y* = *y* ***S*** *x* **(Propriedade Comutativa)**
  3. *x* ***S*** (*y* ***S*** *z*) = (*x* ***S*** *y*) ***S*** *z* **(Propriedade Associativa)**
  4. Se "$x \le y$" e "$w \le z$", então "*x* ***S*** *w*" ≤ "*y* ***S*** *z*" **(Monotonicidade)**

## Operador *T*-Norma

- Uma ***T***-norma (norma triangular) é uma operação matemática binária, ***T***: [0,1] x [0,1]→ [0,1]; que deve satisfazer as seguintes propriedades:
  1. *x* ***T*** 1 = *x*, sendo que *x* ***T*** 0 = 0 **(Condição de contorno)**
  2. *x* ***T*** *y* = *y* ***T*** *x* **(Propriedade Comutativa)**
  3. *x* ***T*** (*y* ***T*** *z*) = (*x* ***T*** *y*) ***T*** *z* **(Propriedade Associativa)**
  4. Se "$x \le y$" e "$w \le z$", então *x* ***T*** *w* ≤ *y* ***T*** *z* **(Monotonicidade)**

**Constata-se então que o max é uma *S*-norma e o min é uma *T*-norma.**

14

# 4. Operações com Conjuntos Fuzzy

*Exemplos de operações*

## Exemplo 1

- Sejam os conjuntos fuzzy *A* e *B*, definidos no universo de discurso *X* = {1, 2, 3, 4, 5}, com graus de pertinência dados por:

  $A = 0.2/1 + 0.5/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.1/5$

  $B = 0.1/1 + 1.0/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.3/5$

  Calcule as seguintes operações:

  a) $\mu_A \cup \mu_B = 0.2/1 + 1.0/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.3/5$

  b) $\mu_A \cap \mu_B = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.1/5$

  c) $\mu_{\bar{A}} = 0.8/1 + 0.5/2 + 0.0/3 + 0.2/4 + 0.9/5$

## Exemplo 2

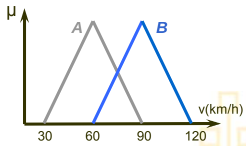
- Sejam os conjuntos fuzzy *A* e *B*, representados na figura ao lado. Faça as seguintes operações:

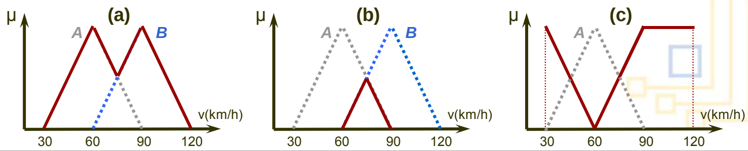
  a) $\mu_A \cup \mu_B$

  b) $\mu_A \cap \mu_B$

  c) $\mu_{\bar{A}}$

Universo de Discurso
$V \in [30, 120]$






# Fim da Apresentação

Núcleo de Pesquisa em
AUTOMAÇÃO INTELIGENTE
de Processos e Sistemas