Aula 5. Processo de Poisson. Exemplos. (Exercícios).

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Amostragem do processo de Poisson.

Sabemos que quando marcamos os eventos em um processo de Poisson (com taxa λ) como evento do tipo I com probabilidade p e evento do tipo II com probabilidade $1-p$, temos que as ocorrências dos eventos do tipo I (II) formam um processo de Poisson com taxa λp ($\lambda(1-p)$). Supomos agora que temos n tipos de eventos e as probabilidades de classificação dos eventos alteram-se durante o tempo (denotamos por $p_i(s)$). Com probabilidade $p_i(s)$, um evento ocorrido em instante s classifica-se como um evento do tipo i, para $i = 1, \ldots, k$. Notamos que

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(s) = 1$$

para qualquer s.

Amostragem do processo de Poisson.

Teorema: Seja $N_i(t), \ i = 1, \ldots, k$, número de eventos do tipo i ocorridos durante um tempo t. Então, $N_i(t)$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson com médias

$$\mathbb{E}(N_i(t)) = \lambda \int_0^t p_i(s) ds.$$

Amostragem do processo de Poisson. Prova.

Calcularemos a distribuição conjunta $\mathbb{P}(N_i(t) = n_i,\ i = 1, \ldots, k)$.

$$\mathbb{P}(N_i(t) = n_i,\ i = 1, \ldots, k)$$
$$= \mathbb{P}\left(N_i(t) = n_i,\ i = 1, \ldots, k \;\middle|\; N(t) = \sum_{i=1}^{k} n_i\right) \mathbb{P}\left(N(t) = \sum_{i=1}^{k} n_i\right).$$

Calcularemos a probabilidade p_i que um evento ocorrido no intervalo $[0, t]$ é do tipo i. No instante de ocorrência, s, ele tem probabilidade $p_i(s)$ de ser do tipo i. O tempo de ocorrência é uniforme em $[0, t]$. Logo, pela probabilidade condicional

$$p_i = \int_0^t p_i(s) \frac{1}{t} ds = \frac{1}{t} \int_0^t p_i(s) ds,$$

independentemente de outros eventos ocorridos.

Amostragem do processo de Poisson. Prova.

Assim, a probabilidade condicional

$$\mathbb{P}\left(N_i(t) = n_i,\ i = 1, \ldots, k \;\middle|\; N(t) = \sum_{i=1}^{k} n_i\right)$$

é a probabilidade multinomial de n_i ocorrências do tipo i, $i = 1, \ldots, k$. Cada evento entre $\sum_{i=1}^{k} n_i$ eventos ocorridos tem probabilidade p_i de ser do tipo i. Segue que

$$\mathbb{P}\left(N_i(t) = n_i,\ i = 1, \ldots, k \;\middle|\; N(t) = \sum_{i=1}^{k} n_i\right) = \frac{(\sum_{i=1}^{k} n_i)!}{n_1! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}.$$

Amostragem do processo de Poisson. Prova.

$$\mathbb{P}\left(N_i(t) = n_i,\ i = 1, \ldots, k \;\middle|\; N(t) = \sum_{i=1}^{k} n_i\right) = \frac{(\sum_{i=1}^{k} n_i)!}{n_1! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1(t) = n_1, \ldots, N_k(t) = n_k) &= \frac{(\sum_{i=1}^{k} n_i)!}{n_1! \ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k} \frac{(\lambda t)^{\sum_i n_i}}{(\sum_i n_i)!} e^{-\lambda t} \\ &= \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda t p_i} \frac{(\lambda t p_i)^{n_i}}{n_i!},\end{aligned}$$

o que completa a prova do teorema. □

Clientes em um servidor infinito (Ross, Exemplo 5.13).

Supomos que a chegada de clientes em uma loja forma um processo de Poisson com taxa λ. A loja tem um número infinito de funcionários, por isso, cada cliente quando chega, já é atendido. Supomos que o tempo de atendimento de um cliente tem função de distribuição acumulada G.

1. Qual é a distribuição de número de clientes que já foram atendidos até o instante t? Denotamos esse número $X(t)$.

2. Qual é a distribuição de número $Y(t)$ de clientes que estão sendo atendidos no instante t?

3. Qual é a distribuição conjunta de $Y(t)$ e $Y(t+s)$? Encontre a covariância $cov(Y(t), Y(t+s))$.

Clientes em um servidor infinito (Ross, Exemplo 5.13).

Fixaremos um instante t. Cada cliente que chega em instante s, tem tempo $\eta_s \sim G$ de atendimento. Para cada cliente, vamos considerar que ele é do tipo 1 se o tempo de atendimento dele acaba até o instante t e que ele é do tipo 2 em caso contrário. Se o cliente chegou em instante s, a probabilidade dele ser

do tipo 1 é igual à $\mathbb{P}(\eta_s < t-s), = G(t-s)$

do tipo 2 é igual à $\mathbb{P}(\eta_s > t-s) = 1 - G(t-s) =: \bar{G}(t-s)$.

Assim, usando o Teorema obtemos que $X(t)$ e $Y(t)$ são independentes e têm distribuição de Poisson com as médias

$$\mathbb{E}(X(t)) = \lambda \int_0^t G(t-s)ds = \lambda \int_0^t G(y)dy$$

$$\mathbb{E}(Y(t)) = \lambda \int_0^t \bar{G}(t-s)ds = \lambda \int_0^t \bar{G}(y)dy,$$

respectivamente.

Clientes em um servidor infinito (Ross, Exemplo 5.13).

Para achar $cov(Y(t), Y(t+s))$ introduzimos outra classificação de eventos. Se o cliente chegou em instante y, então ele vai ser classificado como o cliente

tipo 1, se $y < t$ e o atendimento dele acaba em intervalo $[t, t+s]$

$$p_1(y) = \begin{cases} G(t+s-y) - G(t-y), & \text{if } y < t \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

tipo 2, se $y < t$ e o atendimento dele acaba depois do $t+s$

$$p_2(y) = \begin{cases} \bar{G}(t+s-y), & \text{if } y < t \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

tipo 3, se $y \in [t, t+s]$ e o atendimento dele acaba depois do $t+s$

$$p_3(y) = \begin{cases} \bar{G}(t+s-y), & \text{if } t < y < t+s \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

do tipo 4, em caso contrário. Isto ocorre com a probabilidade

$$1 - p_1(y) - p_2(y) - p_3(y).$$

Clientes em um servidor infinito (Ross, Exemplo 5.13).

Denotando $N_i = N_i(t+s)$ o número de eventos do tipo i, para $i = 1, 2, 3$, temos pelo Teorema que N_i são independentes com distribuição de Poisson com média

$$\mathbb{E}(N_i) = \lambda \int_0^{t+s} p_i(y)dy, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Vejamos que

$$Y(t) = N_1 + N_2, \qquad Y(t+s) = N_2 + N_3.$$

Agora podemos calcular a distribuição conjunta e covariância. Segue que

$$cov(Y(t), Y(t+s)) = cov(N_1 + N_2, N_2 + N_3) = cov(N_2, N_2)$$
$$= \mathbb{V}ar[N_2] = \mathbb{E}[N_2] = \lambda \int_0^t \bar{G}(t+s-y)dy = \lambda \int_0^t \bar{G}(u+s)du$$

Clientes em um servidor infinito (Ross, Exemplo 5.13).

Achamos a distribuição conjunta de $Y(t), Y(t+s)$. Conjunta é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y(t) = i, Y(t+s) = j) &= \mathbb{P}(N_1 + N_2 = i, N_2 + N_3 = j) \\ &= \sum_{m=0}^{\min(i,j)} \mathbb{P}(N_2 = m, N_1 = i - m, N_3 = j - m) \\ &= \sum_{m=0}^{\min(i,j)} \mathbb{P}(N_2 = m)\mathbb{P}(N_1 = i - m)\mathbb{P}(N_3 = j - m).\end{aligned}$$

$\square$

Minimizando número de encontros (Ross, Exemplo 5.14).

Supomos que entradas de carros em uma rodovia formam um processo de Poisson com taxa λ. Carros entram em um ponto A com a saída da rodovia em um ponto B. Cada carro que entra na rodovia escolhe ao acaso a sua velocidade e durante todo percurso se mantém com essa velocidade. Supomos que um carro ultrapassa outro sem perda de velocidade e tempo. Supomos que o seu carro entra nesse highway em tempo s e você pode escolher a sua velocidade. Qual velocidade você escolhe para diminuir o número de encontros com outros carros. (Encontro é qualquer ultrapassagem.)

Minimizando número de encontros (Ross, Exemplo 5.14). Solução.

Seja $d = b - a$ distância de highway. Se você escolhe a velocidade v, então o tempo de viagem em highway é igual a $t_0 = \frac{d}{v}$. Outros carros entram de acordo com o processo de Poisson com taxa λ e escolhem a velocidade V de acordo com a distribuição G. O tempo de viagem é uma variável aleatória $T = d/V$. Seja F a distribuição de T. Temos

$$F(t) = \mathbb{P}(T \le t) = \mathbb{P}(d/V \le t) = \mathbb{P}(V \ge d/t) = \bar{G}(d/t).$$

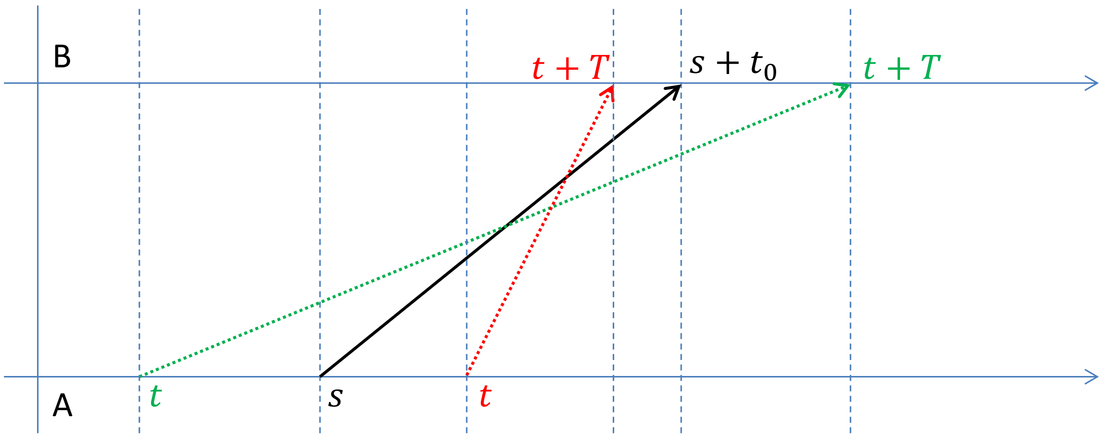
O seu carro entra em instante s e vai sair em $s + t_0$. Se você ultrapassa um carro, significa que ele entrou antes de s e vai sair depois de $s + t_0$. Se um carro vai ultrapassar o seu carro, significa que este carro entrou depois de s e vai sair antes do $s + t_0$. Seja t o tempo de entrada de um carro. Ele encontra o seu carro se o tempo da viagem dele T é tal que

$$\begin{aligned} &t + T > s + t_0, \quad \text{se } t < s, \\ &t + T < s + t_0, \quad \text{se } s < t < s + t_0. \end{aligned}$$

Minimizando número de encontros (Ross, Exemplo 5.14). Solução.

Seja t o tempo de entrada de um carro. Ele encontra o seu carro se o tempo da viagem dele T é tal que

$$\begin{array}{ll} t+T > s+t_0, & \text{se } t<s, \\ t+T < s+t_0, & \text{se } s<t<s+t_0. \end{array}$$



Minimizando número de encontros (Ross, Exemplo 5.14). Solução.

Um carro que entra em instante t vai se encontrar com o seu carro com a probabilidade

$$p(t) = \begin{cases} \mathbb{P}(t+T > s+t_0) = \bar{F}(s+t_0-t), & \text{se } t < s, \\ \mathbb{P}(t+T < s+t_0) = F(s+t_0-t), & \text{se } s < t < s+t_0, \\ 0, & \text{se } t > s+t_0. \end{cases}$$

Usando o Teorema, o número total de carros que o seu carro encontra tem a distribuição de Poisson com média

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty p(t)dt &= \lambda \int_0^s \bar{F}(s+t_0-t)dt + \lambda \int_s^{s+t_0} F(s+t_0-t)dt \\ &= \lambda \int_{t_0}^{s+t_0} \bar{F}(y)dy + \lambda \int_0^{t_0} F(y)dy. \end{aligned}$$

Minimizando número de encontros (Ross, Exemplo 5.14). Solução.

Para minimizar esta média, obtemos

$$\frac{d}{dt_0}\left(\lambda\int_0^\infty p(t)dt\right) = \lambda\Big(\bar{F}(s+t_0) - \bar{F}(t_0) + F(t_0)\Big) = 0.$$

Usando que $\bar{F}(s+t_0) \approx 0$, teremos o tempo t_0 tal que

$$\begin{aligned} F(t_0) - \bar{F}(t_0) = 0 &\Longrightarrow F(t_0) - (1 - F(t_0)) = 0 \\ &\Longrightarrow F(t_0) = 1/2 \Longrightarrow F(d/v_0) = 1/2. \end{aligned}$$

Sabendo que $F(d/v_0) = \bar{G}(v_0)$, vemos que a velocidade ôtima v_0 é a mediana da distribuição de velocidades $\bar{G}(v_0) = 1/2$. Resumindo, mostramos que o número de encontros com carros é uma variável aleatória com distribuição de Poisson e a média tem seu valor mínimo quando a velocidade escolhida é a mediana de G.

□

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 6th edition, Academic Press, 1997.