**MAT0226 - Equações Diferenciais**

**3a. Lista de Exercícios - 2o. semestre de 2020**

1. Considere os vetores:

$$\mathbf{x(t)} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule o Wronskiano de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

   (b) Em que intervalos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente independentes?

   (c) Que conclusão se pode tirar sobre os coeficientes no sistema homogêneo de equações diferencias satisfeitas por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$?

   (d) Encontre esse sistema de equações diferenciais e verifique as conclusõe do item (c).

2. Determine a equação característica os autovalores e autovetores das seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Encontre a solução geral do sistema dado

   (a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x + 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x + 3y \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 3x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 9x - 3y \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 6x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 2y \end{cases}$

   (d) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$

   (e) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{X}$

   (f) $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$

4. Determine a solução dos problemas de valor inicial

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

5. Determine a solução do sistema linear de equaes $x' = Ax$ com a condição inicial $x(0) = x_0$ , sendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix}; \quad x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Determine uma matriz fundamental dos sistemas $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ tendo a matriz de coeficientes dada e encontre uma solução particular satisfazendo a condição inicial dada

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad \eta = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}; \quad \eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}.$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. Calcule $e^{t\mathbf{A}}$ nos seguintes casos

    (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

    (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

12. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13. Determine a solução do sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + \sin x \\ y_2' &= 2y_1 + \cos x \end{aligned}$$

tal que $y_1(0) = 1$ , $y_2(0) = 1$