MAT0130 - Equações Diferenciais e aplicações

2a. Lista de Exercícios - 2o. semestre de 2020

(1) Determine se o par de funções dado é linearmente independente ou linearmente dependente:
(a) $f(t) = t^2, \quad g(t) = t^2 - 5t$
(b) $f(x) = e^{\lambda t}\cos(\mu t), \quad e^{\lambda t}\text{sen}\,(\mu t), \quad \mu \neq 0$
(c) $f(x) = e^{3x}, \quad e^{3(x-1)}$
(d) $f(x) = x^3, \quad f(x) = |x|^3$

(2) Verifique que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^{1/2}$ são soluções da equação diferencial $yy" + (y')^2 = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $y = c_1 + c_2 t^{1/2}$ não é, em geral. Explique por que isto não contradiz o princípio da superposição.

(3) A função $y = sen(t^2)$ pode ser solução de uma equação da forma $y" + py' + qy = 0$, com coeficientes constantes em um intervalo contendo $t = 0$? Explique sua resposta.

(4) Encontre o Wronskiano do par de funções dado:
a) $e^{2t}, \quad e^{3t/2}$ b) $\cos t, \quad \text{sen}\, t$
c) $e^{-2t}, \quad te^{-2t}$ d) $\cos^2 t, \quad 1 + \cos 2t$

(5) O Wronskiano de duas funções é $W(t) = t\text{sen}^2 t$. As funções podem ser linearmente dependentea em um intervalo não degenerado?

(6) Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, mostre que as funções $y_3 = y_1 + y_2$ e $y_4 = y_1 - y_2$ formam também um conjunto linearmente independente de soluções. Reciprocamente Se y_3 e y_4 são soluções linearmente independentes, mostre que as funções y_1 e y_2 formam também um conjunto linearmente independente de soluções.

(7) Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, determine sob que condições as funções $y_3 = ay_1 + by_2$ e $y_4 = cy_1 + dy_2$ formam também um conjunto linearmente independente de soluções.

(8) Mostre que se y_1 e y_2 se anulam no mesmo ponto de um intervalo I, então não podem formar um conjunto linearmente independente de soluções nesse intervalo.

(9) Mostre que se y_1 e y_2 atingem máximo ou mínimo no mesmo ponto de um intervalo I, então não podem formar um conjunto linearmente independente de soluções nesse intervalo.

(10) Mostre que as funções $f(t) = t^3$ e $g(t) = t^2|t|$ são linearmente dependentes em $0 < t < 1$ e em $-1 < t < 0$, mas não são linearmente dependentes em $-1 < t < 1$. Embora f e g sejam linearmente independentes neste intervalo, Mostre que $W(f, g)$ é nulo neste intervalo. f e g podem ser soluções de uma equação linear de segunda ordem com coeficientes contínuos em $-1 < t < 1$?.

(11) Use o método dos coeficientes a determinar para encontrar a solução geral das equações:
(a) $y'' - y' - 2y = 4x^2$
(b) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$
(c) $y'' - y' - 2y = \text{sen}\, 2x$

(d) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$

(12) Use o método da variação dos parâmetros para encontrar a solução geral das equações:
(a) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$
(b) $\ddot{x} + 4x = \operatorname{sen}^2 2t$
(c) $y^{(4)} = 5x$

(13) Ache a solução geral de cada uma das equações diferenciais seguintes.

(a) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$	(b) $y''' + 5y'' - 8y' - 12y = 0$
(c) $4y''' + 12y'' + 9y' = 0$	(d) $y''' + 6y'' + 13y' = 0$
(e) $2y''' + y'' - 8y' - 4y = 0$	(f) $y''' + 3y'' + y' + 3y = 0$
(f) $y^{(4)} - y'' = 0$	(g) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
(h) $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$	(i) $4y^{(4)} - 8y''' - y'' + 2y = 0$
(j) $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$	(k) $y^{(4)} = 0$
(l) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$	(m) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$

(14) Dê a forma do candidato a solução particular prescrito pelo método dos coeficientes a determinar para cada uma das equações abaixo.

(a) $y''' - 2y'' + y' = x^3 + 2e^x$	(b) $y''' - y' = xe^{-x} + 2\cos x$
(c) $y^{(4)} - 2y'' + y = e^x + \cos x$	(d) $y^{(4)} + 2y'' = \cos(2x) + xe^x + 4$
(e) $y^{(4)} - y''' - y'' + y' = x^2 + 4 + x\cos x$	(f) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 2xe^{-x} + e^{-x}\cos x$

(15) **Equações redutíveis à primeira ordem:** Alguns tipos de equações de segunda ordem podem, após uma mudança de variável, passar a ser de primeira ordem e assim resolvidos pelos métodos conhecidos.

CASO 1: **Variável Dependente Ausente:** Se na equação y não estiver presente, fazemos $z = y'$ e assim como $y'' = z'$, a equação passa a ser de primeira ordem.
Ex: $xy'' - y' = 3x^2$; se $z = y'$ temos a equação $xz' - z = 3x^2$.
(a) Resolva por esse método as equações:

(1) $xy'' - y' = 3x^2$	(2) $xy'' = y' + (y')^2$
(3) $x^2y'' = 2xy' + (y')^2$	(4) $x^2y'' + xy' + 1$

CASO 2: **Variável Independente Ausente:** Se a variável x não estiver presente explicitamente na equação, introduzimos uma nova variável dependente u, fazendo $y' = u$, e adotamos y como variável independente, temos então para $u = u(y)$,

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$$

e, fazendo a substituição, a equação se transforma em duas equações de primeira ordem.
Ex: $y'' + y = 0$ se transforma em $u\frac{du}{dy} + y = 0$ e $u = \frac{dy}{dx}$.

(b) Resolva por esse método as seguintes equações:

(1) $y'' + 4y = 0$	(2) $y'' - 9y = 0$
(3) $yy'' + (y')^2 = 0$	(4) $yy'' = y^2y' + (y')^2$

(c) Encontre a solução particular

(1) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0\,;$ $\qquad y'(0) = 0\,;\quad y(0) = 1\,.$

(2) $yy'' = y^2y' + (y')^2\,;$ $\qquad y(0) = -\dfrac{1}{2}\,;\quad y'(0) = 1\,.$

(16) **(Método da redução de ordem)** Suponha que $y = y_1(t)$ seja uma solução não nula da equação

(1) $$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0.$$

Mostre que

$$y_2(t) = y_1(t)\int^t \frac{\exp\left(-P(s)\right)}{y_1(s)^2}\,ds$$

onde $P(t)$ é primitiva de $p(t)$, é outra solução de (1) e que $\{y_1, y_2\}$ é linearmente independente.

(17) Verifique que cada uma das funções entre parêntesis abaixo é uma solução da equação que a precede e use o método da redução de ordem para encontrar a solução geral das seguntes equações:

a) $(1-t^2)\ddot{y} + 2t\dot{y} - 2y = 0$ $\quad (y_1(t) = t)$
b) $\ddot{y} - \frac{2(t+1)}{t^2+2t-1}\dot{y} + \frac{2}{t^2-2t+1}y = 0$ $\quad (y_1(t) = t+1)$
c) $\ddot{y} - 4t\dot{y} + (4t^2-2)y = 0$ $\quad (y_1(t) = e^{t^2})$
d) $(1-t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = 0$ $\quad (y_1(t) = t)$
e) $(1+t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = 0$ $\quad (y_1(t) = t)$
f) $(1-t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + 6y = 0$ $\quad (y_1(t) = 3t^2 - 1)$
g) $\ddot{y} + 4t\dot{y} + (4t^2+2)y = 0$ $\quad (y_1(t) = e^{-t^2})$
h) $\ddot{y} - (2\sec^2 t)y = 0$ $\quad (y(t) = \operatorname{tg} t)$
i) $\ddot{y} - \frac{t+1}{t}\dot{y} - \frac{2(t-1)}{t}y = 0$ $\quad (y_1(t) = e^{2t})$

(18) Sabendo que a equação $t\ddot{y} - (1+3t)\dot{y} + 3y = 0$ tem uma solução da forma e^{ct}, para alguma constante c, determine a solução geral.

(19) (a) Mostre que t^r é uma solução da *equação de Euler*

$$t^2\ddot{y} + \alpha t\dot{y} + \beta y = 0, \qquad t > 0$$

se e somente se $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$.

(b) Suponha que $(\alpha - 1)^2 = 4\beta$. Usando o método da redução de ordem, prove que $t^{(1-\alpha)/2}\ln t$ é uma segunda solução da equação de Euler.

(20) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações:

a) $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + y = 0$ $\quad$ b) $t^2\ddot{y} - t\dot{y} + y = 0$
c) $t^2\ddot{y} - 4t\dot{y} + 6y = 0$ $\quad$ d) $t^2\ddot{y} - 3t\dot{y} + 5y = 0$

(21) Determine a solução da equação

$$\ddot{y} + \frac{4}{t}\dot{y} + \frac{2}{t^2}y = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

que satisfaz as condições iniciais $y(1) = 1$ e $\dot{y}(1) = 0$.

(22) Sabe-se que a equação $t^2\ddot{y} - 2y = 0$ tem soluções da forma $y(t) = t^r$, para algum r. Usando essas soluções, ache a solução geral de $t^2\ddot{y} - 2y = t^2$.

(23) Sabe-se que $y_1 = 3e^t + e^{t^2}$, $y_2 = 7e^t + e^{t^2}$ e $y_3 = 5e^t + e^{-t^3} + e^{t^2}$ são soluções de uma equação linear de 2a. ordem $L[y] = g(t)$. Determine a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = g(t) \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad \dot{y}(0) = 2.$$

(24) Resolva cada um dos problemas de valor inicial:
(a) $3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = e^{-t}\sin t$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$,
(b) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = t^{5/2}e^{-2t}$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$,
(c) $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = \sqrt{t+1}$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$,
(d) $\ddot{y} - y = f(t)$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.