MAE 224 - PROBABILIDADE II
LISTA 7 - CLASSE
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Verifique, nos casos abaixo, se a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição. Em caso afirmativo, qual a distribuição limite:

a) $X_n \sim U(0, n)$.

Solução

X_n t́al que
$F_{X_n}(x) = 0, \quad se \quad x < n;$
$F_{X_n}(x) = \frac{x}{n}, \quad se \quad 0 \leq x < n;$
$F_{X_n}(x) = 1, \quad se \quad x \geq n.$
Portanto $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = 0$, que não é uma função de distribuição.

b) X_n t́al que
$F_{X_n}(x) = 0, \quad se \quad x < \frac{1}{n};$
$F_{X_n}(x) = \frac{1}{2}(x + 1 - \frac{1}{n}), \quad se \quad \frac{1}{n} \leq x < 1 + \frac{1}{n};$
$F_{X_n}(x) = 1, \quad se \quad x \geq 1.$

Solução Tomando o limite temos
$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = 0, \quad se \quad x < 0;$
$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \frac{1}{2}(x + 1), \quad se \quad 0 \leq x < 1;$
$F_{X_n}(x) = 1, \quad se \quad x \geq 1.$
que é uma função de distribuição de uma variável aleatória mista , pois tem probabilidade $\frac{1}{2}$, no ponto zero, que corresponde

ao salto de $F(.)$ neste ponto e tem distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$, com probabilidade $\frac{1}{2}$.

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com

$$P(X_n = k) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}, \quad k \in \{0,1,...,n\}.$$

Prove que $\frac{X_n}{n}$ converge em distribuição para X, com função de distribuição $F_x(x) = x^2$.

Solução

A função de distribuição de X_n é $F_{X_n}(x) = 0, \quad se \quad x < 0;$

$$F_{X_n}(x) == \sum_{j=0}^{[x]} \frac{2(j+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=0}^{[x]} (j+1) =$$

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{j=1}^{[x]+1} j = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{([x]+1)([x]+2)}{2} =$$

$$\frac{([x]+1)([x]+2)}{(n+1)(n+2)}, \quad se \quad 0 \leq x < n$$

$F_{X_n}(x) = 1, \quad se \quad x \geq n.$

Seja $Y_n = \frac{X_n}{n}$. A função de distribuição de Y_n) é $G_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) =$

$$G_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(Y_n \leq y) = P(\frac{X_n}{n} \leq y) =$$

$$P(X_n \leq ny) = F_{X_n}(ny) = \frac{([ny]+1)([ny]+2)}{(n+1)(n+2)}.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} G_{Y_n}(y)$ é igual a zero se $y < 0$ e é igual a 1 se $Y \geq 1$. Se $0 \leq y \leq 1$ temos

$$\lim_{n\to\infty} G_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{([ny]+1)([ny]+2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{([ny]+1)}{(n+1)} \lim_{n\to\infty} \frac{([ny]+2)}{(n+2)} = y^2, 0 \leq y < 1.$$

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com função característica igual a $\varphi_{X_i}(t) = e^{-|t|}$, isto é,com distribuição de Cauchy padrão. Qual o limite em distribuição de $(\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n})_{n\geq 1}$?

Solução

Calculemos a função característica de $\overline{X}_n$:

$$\varphi_{\overline{X}_n}(t) = E[e^{it\overline{X}_n}] = E[e^{i\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n X_j}] =$$

$$E[\prod_{j=1}^n e^{i\frac{t}{n}X_j}] = \prod_{j=1}^n E[e^{i\frac{t}{n}X_j}]] =$$

$$\prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(\frac{t}{n}) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_1}(\frac{t}{n}) =$$

$$(\varphi_{X_1}(\frac{t}{n}))^n = (e^{-|\frac{t}{n}|})^n = e^{-|t|}.$$

Concluimos que $\overline{X}_n$ também tem distribuição de Cauchy padrão, independente de n, e o limite em distribuição é Cauchy padrão.

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuições geométricas de parâmetros $\frac{\lambda}{n}, \lambda > 0$. Seja $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Prove que a sequência $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição. Qual o limite?

Solução

A distribuição geométrica de parâmetro $\frac{\lambda}{n}$ tem função de probabilidade

$$P(X_n = k) = \frac{\lambda}{n}(1 - \frac{\lambda}{n})^{k-1}), \quad k = 1, 2, 3, ...$$

A função de distribuição é: $F_{X_n}(x) = 0, \quad se \quad x < 1$ e

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = \sum_{k=1}^{x} P(X_n = k) =$$

$$\frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{x}(1 - \frac{\lambda}{n})^{k-1}) =$$

$$\frac{\lambda}{n}\frac{1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^x}{1 - (1 - \frac{\lambda}{n})} = 1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^x$$

A fun ção de distribuição de Y_n é

$$G_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(\frac{X_n}{n} \leq y) =$$

$$P(X_n \leq ny) = 1 - (1 - \frac{\lambda}{n})^n y = 1 - ((1 - \frac{\lambda}{n})^n)^y.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} G_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty} 1 - ((1 - \frac{\lambda}{n})^n)^y = 1 - e^{-\lambda y}.$$