MAT0234 Medida e Integração
Segundo Semestre de 2020
Aula 12

Teorema da Convergência Dominada:

Sejam $(X, \boldsymbol{A}, \mu)$ um espaço de medida, e $f_n \in M$ uma sequência de funções mensuráveis que converge para uma função f, e $g : (X, \boldsymbol{A}) \to \bar{\mathbb{R}}$ uma função integrável com $|f_n(x)| \leq g(x) \; \forall \, x \in X$.
Então $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ e $\int |f_n - f| \, d\mu \to 0$.
Dem: pelo Lema de Fatou. Como $|f_n(x)| \leq g(x)$ temos que
$lim f_n(x) \leq g(x)$.
Portanto, $|f_n - f| \leq 2g$.
Aplicamos o Lema de Fatou à sequência $2g - |f_n - f|$:
$\int liminf \; (2g - |f_n - f|) d\mu \leq liminf \int (2g - |f_n - f|) \, d\mu$
Note que $liminf \; (-a_n) = - \, limsup \; (a_n)$
$\int 2g - limsup |f_n - f| \, d\mu \leq liminf \int 2g \, d\mu + liminf \int -|f_n - f| \, d\mu$
ou equivalentemente porque $\int 2g \, d\mu < +\infty$ e podemos cancelar nos dois membros
$- \int limsup \, |f_n - f| \, d\mu \leq liminf \int -|f_n - f| \, d\mu$
Como $f_n(x) \to f(x) \; \forall \, x$ segue
$0 \leq - \, limsup \int |f_n - f| \, d\mu$
$0 \geq limsup \int |f_n - f| \, d\mu$
Logo $lim \int |f_n - f| \, d\mu = 0$. Também $\int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \to 0 \square$
Exercício: Calcular $lim_{n \to +\infty} \int_1^n (1 + \dfrac{x}{n})^n \, e^{-2x} \, dx$
Pelo Teorema da Convergência Dominada. Definamos a sequência
$f_n = \begin{cases} (1 + \dfrac{x}{n})^n \, e^{-2x} \; se \; 1 < x < n; 0 \; para \; x > n \end{cases}$
$Como \; (1 + \dfrac{x}{n})^n \to e^x \; segue \; que \; f_n(x) \to e^{-x} = f$. Falta colocar uma função integrável que domine a sequência.
Como sabem, $(1 + \dfrac{x}{n})^n \leq e^x$ logo $f_n \leq e^{-x}$. Tomamos $g = e^{-x}$ que é integrável. Assim podemos aplicar o Teorema e temos que
$\int f_n \, d\mu \to \int_1^{+\infty} f \, d\mu = e^{-1}$. Para calcular $\int f \, d\mu$, o fazemos como uma integral imprópria de Riemann. (Eu me adiantei e usei um resultado que ainda não vimos, e vamos ver hoje. Na verdade não precisa disto! Podemos calcular a integral de Lebesgue diretamente por $\int_{[1,+\infty)} e^{-x} \, d\mu = \sum_1^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-x} \, dx$. Mas isto é mais trabalhoso!)

Corolário. *: Se* $f_n : (X, \boldsymbol{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções tais que* $\exists \int_X f_n d\mu$. *Então se* $\sum_1^\infty \int_X |f_n(x)| d\mu < +\infty$ *temos que* $\sum_1^\infty \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_1^\infty f_n d\mu$.

Observe que neste Corolário o resultado é o mesmo que no Corolário do Teorema da Convergencia Monótona, mas f_n não precisa ser ≥ 0 nem monótona. Em compensação, precisa estar "dominada".
Exercício: se $f_n \to f \in M^+$ e $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ então
$\int_E f_n \, d\mu \to \int_E f \, d\mu \; \forall \, E \in \mathcal{A}$. (ficou para ser resolvido pelos estudantes)
O seguinte Teorema é uma versão do Teo da Convergencia Monótona, para o caso em que as $\int f_n \, d\mu$ são uniformemente limitadas.

Teorema (Beppo Levi):

Sejam $E \subset R^n$, $\boldsymbol{A}$ uma σ - álgebra e $f_n : (E, \boldsymbol{A}) \to \bar{\mathbb{R}}^+$ uma sequência não decrescente de funções mensuráveis não negativas, $E \in \boldsymbol{A}$. Suponha que $\int_E f_n d\mu \leq M$, $M \in \mathbb{R}$
Então $\exists\ lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ e é finito em qtp, f é integrável em E e $lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$
Demonstração: Observe que como as f_n são não decrescentes, o limite f existe (finito ou infinito) e é mensurável por ser limite de funções mensuráveis. Então existe $\int\ f\ d\mu$, finita ou infinita. Como $\int\ f\ d\mu$ é o limite das $\int\ f_n\ d\mu\ \leq\ M$, então $\int\ f\ d\mu\ \leq\ M$ também. Logo é integrável.
Disgressão: Houve a pergunta de por quê isto é verdade. Vamos ver por quê. Afirmamos que se $a_n \to\ a$ e $a_n\ \leq\ M$ então $a\ \leq\ M$. Com efeito, se fosse $a\ >\ M$, tomo $\epsilon\ =\ (a\ -\ M)/2$. Então existe N natural tal que $|a_n\ -\ a| <\ \epsilon\ \forall\ n\ >\ N$ pela convergência. Logo segue $a\ -\ M\ \leq\ a\ -\ a_n\ +\ a_n\ -\ M\ <\ (a\ -\ M)/2\ +\ a_n\ -\ M$. Note que $a_n\ -\ M\ <\ 0$ por hipótese. Absurdo. Logo $a\ \leq\ M$.
Voltando à demonstração: Como f é integrável, $\mu(\{f\ =\ +\infty\})\ =\ 0$ (isto foi visto em aula anterior).

Aplicações dos Teoremas

Notação: Indicaremos $\int_{[a,b]}\ f\ d\mu$ para a Integral de Lebesgue no intervalo [a,b] e $\int_a^b\ f(x)\ dx$ para a Integral de Riemann.
Já vimos que se existir a Integral de Riemann de f num intervalo limitado [a,b], f é mensurável e a Integral de Lebesgue é igual a Integral de Riemann. E as integrais impróprias de Riemann?
Integral Imprópria de Riemann e Integral de Lebesgue A propriedade seguinte é muito simples mas pode ser útil.

Proposição 1. *Se f mensurável e $|f|\ \leq\ g$ onde g é integrável, então f é integrável.*

Solução: com efeito, como $|f|\ e\ g\ \in\ M^+$ então $|f|$ integrável. Agora, $|f|\ =\ f^+\ +\ f^-$ e como f mensurável, $f\ =\ f^+\ -\ f^-$ resulta f integrável.

Proposição 2. *Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}^+\ (\geq\ 0)$ tal que existe a integral imprópria de Riemann $I\ =\ lim_{x\uparrow b} \int_a^x\ f\ d\mu$. Então existe a $\int_{[a,b]}\ f\ d\mu$ e é igual 'a integral imprópria.*

Observe que tomando por exemplo $b_n \uparrow\ b, e f_n\ =\ f\ \chi_{[a,b_n]}$ temos que a sequencia é monótona e as integrais uniformemente limitadas por I=integral imprópria de Riemann. Pelo Teo da Convergencia Monótona $\int_{[a,b]}\ f_n\ d\mu \to\ \int_{[a,b]}\ f\ d\mu\ =\ I$. Como para as f_n as Integrais de Riemann e de Lebesgue coincidem, os limites respectivos devem ser iguais. Isto é válido para b finito ou $b\ =\ +\infty$.

1. **Exercício** Mostre que $\int_1^{+\infty}\ e^{-x}\ dx\ =\ \int_{[1,+\infty)}\ e^{-x}\ d\mu$.
   Solução: Note que $f_n\ =\ e^{-x}\chi_{[0,n]} \to\ e^{-x}$ monotonamente. Pelo Teo da Convergência Monótona, $\int_{[1,+\infty)}\ e^{-x}\ d\mu\ \to\ \int_{[1,+\infty)}\ e^{-x}\ d\mu$. Mas $\int_{[1,n]}\ e^{-x}\ d\mu\ =\ \int_1^n\ e^{-x}\ dx\ =\ e^{-1}\ -\ e^{-n}\ \to\ e^{-1}$.

2. **Exercício** Calcule $\lim_{n\to\ +\infty}\ \int_0^1\ nt\ sent\ \dfrac{1}{1 + nt}\ dt$

Solução: $f_n = nt\ sent\ \frac{1}{1+nt} = sent\ [1 - \frac{1}{1+nt}]$; $t \in [0,1]$. Aqui notamos que por um lado $f_n \to sent$ e que $f_n \geq 0$ monótona e também $f_n \leq sent$. Podemos utilizar o Teo da Convergência Monótona para deduzir que $\int f_n\ d\mu \to \int_{[0,1]} sent\ d\mu = \int_0^1 sent\ dt = 1 - cos(1)$.
Outra solução: sem usar a monotonicidade de f_n podemos utilizar o Teorema da Convergência Dominada porque $f_n \leq sent$ positivas em [0,1].

3. **Exercício** Calcule $\lim_{n\to +\infty} \int_a^{+\infty} n^2\ t\ e^{-n^2\ t^2}\ \frac{1}{1+t^2}\ dt$ sendo $a > 1$.

   Solução: $f_n = n^2\ t\ e^{-n^2\ t^2}\ \frac{1}{1+t^2}\ \chi_{[0,n]} \geq 0$. A sequência converge para 0, quando n vai para infinito (pode-se ver por Regra de L'Hôpital). Também $f_n \leq \frac{1}{1+t^2}$. Para mostrar isto devemos mostrar que $n^2\ t\ e^{-n^2\ t^2} \leq 1$; $t > 1$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, $\int f_n\ d\mu \to 0$. Outra forma: podemos tomar $g_n = n^2\ t\ e^{-n^2\ t^2}\ \frac{1}{1+t^2}$. Como $g_n \leq \frac{1}{1+t^2}$, g_n é integrável para todo n. E seguimos pelo Teorema da COnvergência Dominada como acima.
   Pergunta: pode-se aplicar o Teorema da Convergência Monótona?

4. **Exercício** Sejam $f_n : [0,1] \to [0,1]$; $f_n \to 0$, *contínuas*. Mostre usando Integral de Lebesgue que $\int_{[0,1]} f_n\ d\mu \to 0$. A seguir, para verificar a força dos métodos desenvolvidos, tente mostrar isto sem usar a Integral de Lebesgue.

   Proposição 3. *Seja $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ tal que existem as integrais impróprias de Riemann $I = lim_{x\uparrow b} \int_a^x f\ dx$ e $M = lim_{x\uparrow b} \int_a^x |f|\ dx$. Então existe a $\int_{[a,b]} f\ d\mu$ e é igual a integral imprópria I.*

   Dem: Tomando por exemplo $b_n \uparrow b$, e $f_n = f\ \chi_{[a,b_n]}$ temos que a $|f_n| \leq |f|$. Mas não sabemos se $|f|$ é integrável! Só sabemos que sua integral imprópria existe. A sequência $|f_n|$ é monótona e suas integrais $\int_{[a,b]} |f_n|\ d\mu$ uniformemente limitadas por M=integral imprópria de Riemann de $|f|$. Pela Proposição 2 anterior,
   $\int_{[a,b]} |f_n|\ d\mu \to \int_{[a,b]} |f|\ d\mu = M$. Assim, $|f|$ é integrável e portanto f é integrável.
   Como f é integrável podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para a sequência f_n (sem módulo!), lembrando ainda que $|f_n| \leq |f|$. E assim $\int_{[a,b]} f_n\ d\mu \to \int_{[a,b]} f\ d\mu = I$.
   Isto é válido para b finito ou $b = +\infty$.

5. **Exercício** $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty)} sen(\frac{x}{n})\ \frac{1}{1+x^2} dx$

   Solução: seja $f_n = sen(\frac{x}{n})\ \frac{1}{1+x^2}$. É claro que $|f_n| \leq \frac{1}{1+x^2}$. Logo são integráveis e a sequência é dominada por $g = \frac{1}{1+x^2}$. Por outro lado, é fácil ver que $f_n(x) \to_{n\to +\infty} 0$. Assim
   $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty)} sen(\frac{x}{n})\ \frac{1}{1+x^2} dx = 0$

Exercício. $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty)} cos(\frac{x}{n}) \frac{1}{1+x^2} dx$