[12pt]article
document

MAE 224 - PROBABILIDADE II
LISTA 10 - CLASSE
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1)Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, X_n com função densidade de probabilidade

$$f_n(x) = \frac{1}{2n}e^{-\frac{|x|}{n}}, x \in \Re.$$

Verifique se a condição de Liapunov é válida?

Solução

Devemos provar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E[|X_k - \mu_k|] = 0.$$

Observe que a função de densidade de X_n é impar, isto é, $f_{X_n}(x) = f_{X_n}(-x)$ e portanto $\mu_n = 0$. Assim

$$\sigma_n^2 = E[X_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2n}e^{-\frac{|x|}{n}}dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 \frac{1}{2n}e^{-\frac{|x|}{n}}dx + \int_{0}^{\infty} x^2 \frac{1}{2n}e^{-\frac{|x|}{n}}dx =$$

$$2\int_{0}^{\infty} x^2 \frac{1}{2n}e^{-\frac{|x|}{n}}dx = Var[\exp(\frac{1}{n})]) + E[\exp(\frac{1}{n})]^2 = n^2 + n^2 = 2n^2.$$

Portanto $s_n^2 = \Sigma_{k=1}^n \sigma_k^2 = 2\Sigma_{k=1}^n k^2$. e utilizando que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}} \Sigma_{k=1}^n k^\lambda = \frac{1}{\lambda+1},$$

temos $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\Sigma_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n^2}{n^3} = \frac{2}{3}$,

Por outro lado

$$E[|X_k|^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{2k}e^{-\frac{|x|}{k}}dx =$$

$$2.\int_{0}^{\infty} x^3 \frac{1}{2k}e^{-\frac{|x|}{k}}dx = 3\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{k}}dx = 3k.2k^2 = 6k^3.$$

Temos $\sum_{k=1}^n E[|X_k|^3] = 6.\sum_{k=1}^n k^3$, e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} E[|X_k|^3] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} 6.\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{6}{4}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^{n} E[|X_k|^3] = \frac{n^{\frac{9}{2}}}{s_n^3} \frac{\sum_{k=1}^n E[|X_k|^3]}{n^4} \frac{n^4}{n^{\frac{9}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\frac{6}{4}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas tais que $E[X_k] = 0$ e $Var(X_k) = 1$.

Seja $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(Y_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}$ e $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n^2}$. Verifique que a condição de Lindeberg não vale, mas

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n} Y_k) \to^{D} N(0,1).$$

Solução

Mostremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|y-\mu_k|<\varepsilon s_n\}} (y-\mu_k)^2 dF_k(y) = 0.$$

Como $P(Y_k = \pm k) = \frac{1}{2k^2}$ e $P(Y_k = 0) = 1 - \frac{1}{2k^2}$, temos $\mu_k = 0$. Temos também $\sigma_k^2 = \frac{2K^2}{2k^2} = 1$. implica que $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = n$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\{|y|<\varepsilon\sqrt{n}\}} (y)^2 dF_k(y) = 0$$

para $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Contudo

$$\varphi_{\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sqrt{n}}}(t) = E\left[e^{it\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sqrt{n}}}\right] =$$

$$\prod_{k=1}^{n} E[e^{it\frac{Y_k}{\sqrt{n}}}] = \prod_{k=1}^{n} [\frac{e^{\frac{itk}{\sqrt{n}}} - e^{\frac{-itk}{\sqrt{n}}}}{2} + (1 - \frac{1}{2k^2})] =$$

$$\prod_{k=1}^{n} [\cos(\frac{tk}{\sqrt{n}})\frac{1}{k^2} + (1 - \frac{1}{2k^2})] n \to \infty \longrightarrow 1$$

Como $\varphi_Y(t) = 1$, contínua no ponto 0, caracteriza completamente a variável aleatória Y degenerada em 0, temos $\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sqrt{n}}$ converge em distribuição para Y e, portanto, converge em probabilidade para Y.

Tratando da sequência: Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, com $E[X_k] = 0$ e $Var(X_k) = 1$, pelo teorema do limite central

$$\frac{\Sigma_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\Sigma_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}} - 0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

converge em distribuição para a distribuição normal padrão. Portanto, pelo Teorema de Slutsky temos

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n} Y_k) \to^{D} N(0,1).$$

3) Lança-se uma moeda equilibrada até observar 100 caras. Determine a probabilidade de que sejam necessários, no mínimo, 226 lançamentos.

Solução

Defina a variável aleatória

$$N = \inf\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i = 100\}$$

onde $X_i, \quad i = 1, 2, 3, ...$ so variáveis aleatórias de Bernoulli,independentes com probabilidade de sucesso igual a $\frac{1}{2}$.

A probabilidade de haver no mínimo, 226 lançamentos é $P(N \geq 226) = P(\sum_{i=1}^{225} X_i < 100)$. Pelo Teorema do Limite Central temos

$$P(\sum_{i=1}^{225} X_i < 100) =$$

P($\frac{\sum_{i=1}^{225} X_i - 112,5}{7,5 < \frac{100-112,5}{7,5}) =} P(Z < -1,66) = 0,05.$

4) Sejam $X_1, X_2, ...$ variáveis aleatórias positivas, independentes e com funções de distribuições absolutamente contínuas $F_1, F_2, ...$ respectivamente. Defina

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{X_i} \frac{dF_i(x)}{1 - F_i(x)}.$$

Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{g(\frac{y}{n}) Y^{n-1} e^{-y}}{(n-1)!} dy.$$

onde g é uma função definida nos reais, avalores reais, contínua e limitada.

Solução

Observe que

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{X_i} \frac{dF_i(x)}{1 - F_i(x)} = \sum_{i=1}^{n} - \ln F_i(X_i)$$

e que $Y_i = -\ln(F_i(X_i))$ são i.i.d. com distribuição exponencial padrão.

Portanto $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ e

$$E[g(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n})] = \int_0^{\infty} \frac{g(\frac{y}{n}) Y^{n-1}.e^{-y}}{(n-1)!} dy.$$

Como $\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ converge em distribuição para a distribuição degenerada em 1, pelo Teorema de Helly Bray ,

$$\lim_{n \to \infty} E[g(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n})] = E[g(1)].$$