Exercícios - Cálculo IV - Aula 8 - Semana 13/10 - 16/10
Séries de Potências

Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ com intervalo de convergência I. Então a série define uma função $f : I \to \mathbb{R}$ dada pela soma da série, isto é, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. Os seguintes resultados mostram que f é contínua, derivável e integrável no intervalo aberto $]x_0 - R, x_0 + R[$, onde R é o raio de convergência, e mostram como calcular a derivada e a integral de f. As demonstrações estão na apostila da Janete.

> **Teorema 1** *Seja* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *com raio de convergência* $R \neq 0$. *Então esta função é infinitamente derivável no intervalo* $]x_0 - R, x_0 + R[$ *e para cada* $k \geq 1$ *a derivada de ordem* k *de* $f(x)$ *será*
>
> $$\frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} [n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))] c_n(x-x_0)^{n-k}$$
>
> *todas com raio de convergência* R.

Exemplo 1 *Sabemos que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \textit{para} \quad |x| < 1 = R$$

Derivando a série e usando o Teorema 1 acima temos

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots \quad \textit{para} \ \ |x|<1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, x^{n-2} = 2+3.2\,x+4.3\,x^2+\cdots \quad \textit{para} \ \ |x|<1,$$

$$f'''(x) = \frac{2.3}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} n\,(n-1)(n-2)x^{n-3} = 3.2+4.3.2\,x+5.4.3\,x^2+\cdots$$

para $|x|<1$.

Teorema 2 *(Continuidade de uma série de potências) Seja* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *com raio de convergência* $R \neq 0$. *Então* $f(x)$ *é uma função contínua para* $x \in]x_0-R, x_0+R[$.

Teorema 3 *(Integral de uma série de potências). Seja* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *com raio de convergência* $R \neq 0$. *Então para todo intervalo* $[a,b] \subset]x_0-R, x_0+R[$ *temos*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n(x-x_0)^n dx$$

Em particular para todo $x \in]x_0-R, x_0+R[$, *uma primitiva de* $f(x)$ *será*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

cujo raio de convergência também é R.

Exemplo 2 *Trocando-se x por $-x$ na série geométrica obtemos*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \textit{para} \quad |-x| = |x| < 1$$

Integrando e usando o Teorema 3 temos

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln|1+x| = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \textit{para} \quad |x| < 1.$$

Observe que o intervalo de convergência desta série é $I =]-1, 1]$.

Teorema 4 *Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ com raio de convergência $R \neq 0$. Se a série converge em $x = x_0 + R$ então $f(x_0 + R) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$, ou seja, f é contínua em $x_0 + R$. Idem para $x = x_0 - R$.*

Exemplo 3 *Vimos no exemplo acima que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$. Como a série converge para $x = 1$, segue do Teorema 4 acima que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.*

Exemplo 4 *Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$. Como o raio de convergência da série é infinito, esta função está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando temos:*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x).$$

Logo f é solução do seguinte P.V.I.: $y' - y = 0$, $y(0) = 1$. Como $g(x) = e^x$ também é solução deste P.V.I. podemos concluir que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois todo P.V.I. tem solução única.

Exercício 1 *Calcule a soma de cada uma das seguintes séries, bem como seu intervalo de convergência:*
(a) $x + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots$
(b) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$

Exercício 2 *Determine uma série de potências para representar $f(x)$ em cada caso e dê o raio de convergência:*

$$a)\ \frac{1}{1+x^2} \qquad b)\ \frac{1}{(1+x)^2} \qquad c)\ \frac{x^2}{1-x^2} \qquad d)\ \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$e)\ \frac{3}{2x+5} \qquad f)\ \frac{x}{2-3x} \qquad g)\ e^{-x} \qquad h)\ senh(x)$$