Lógica
Aula 10

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2020

Prova da completude

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi \implies \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

Prova da completude

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi \implies \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \vdash \psi$$

1. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \models \psi \implies \models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \psi)...))$
2. $\models \chi \implies \vdash \chi$
3. $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \psi)...)) \implies \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \vdash \psi$

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi \Longrightarrow \vdash \chi$$

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi$$

p_1	p_2	...	p_n	...	χ
F	F	...	F	...	T
F	F	...	T	...	T
F	T	...	F	...	T
F	T	...	T	...	T
T	F	...	F	...	T
T	F	...	T	...	T
T	T	...	F	...	T
T	T	...	T	...	T

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi$$

p_1	p_2	...	p_n	...	χ
F	F	...	F	...	T
F	F	...	T	...	T
F	T	...	F	...	T
F	T	...	T	...	T
T	F	...	F	...	T
T	F	...	T	...	T
T	T	...	F	...	T
T	T	...	T	...	T

$$\overline{p_i} = \begin{cases} p_i & \text{if } v(p_i) = T \\ \neg p_i & \text{if } v(p_i) = F \end{cases} \tag{1}$$

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi$$

p_1	p_2	...	p_n	...	χ
F	F	...	F	...	T
F	F	...	T	...	T
F	T	...	F	...	T
F	T	...	T	...	T
T	F	...	F	...	T
T	F	...	T	...	T
T	T	...	F	...	T
T	T	...	T	...	T

$$\overline{p_i} = \begin{cases} p_i & \text{if } v(p_i) = T \\ \neg p_i & \text{if } v(p_i) = F \end{cases} \qquad (1)$$

Para cada linha l, um sequente:

$$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \chi$$

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi$$

p_1	p_2	...	p_n	...	χ
F	F	...	F	...	T
F	F	...	T	...	T
F	T	...	F	...	T
F	T	...	T	...	T
T	F	...	F	...	T
T	F	...	T	...	T
T	T	...	F	...	T
T	T	...	T	...	T

$$\neg p_1, p_2, ..., \neg p_i \vdash \chi$$

Prova da completude - Passo 2

Para cada linha l:

$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$ se $v(\varphi) = T$

Prova da completude - Passo 2

Para cada linha l:

$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$ se $v(\varphi) = T$

$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\varphi$ se $v(\varphi) = F$

Prova da completude - Passo 2

Para cada linha l:
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$ se $v(\varphi) = T$
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\varphi$ se $v(\varphi) = F$

Prova por indução estrutural.

Prova da completude - Passo 2

Para cada linha l:
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$ se $v(\varphi) = T$
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\varphi$ se $v(\varphi) = F$

Prova por indução estrutural.
Base: $\varphi = p$, $p \vdash p$ e $\neg p \vdash \neg p$

Prova da completude - Passo 2

Para cada linha l:
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$ se $v(\varphi) = T$
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\varphi$ se $v(\varphi) = F$

Prova por indução estrutural.
Base: $\varphi = p$, $p \vdash p$ e $\neg p \vdash \neg p$
Se $\varphi = \neg\psi$, temos dois casos:
$v(\varphi) = T \Rightarrow v(\psi) = F \Rightarrow \overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\psi \Rightarrow \overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$

Prova da completude - Passo 2

Para cada linha l:
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$ se $v(\varphi) = T$
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\varphi$ se $v(\varphi) = F$

Prova por indução estrutural.
Base: $\varphi = p$, $p \vdash p$ e $\neg p \vdash \neg p$
Se $\varphi = \neg\psi$, temos dois casos:
$v(\varphi) = T \Rightarrow v(\psi) = F \Rightarrow \overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\psi \Rightarrow \overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$
$v(\varphi) = F \Rightarrow v(\psi) = T \Rightarrow \overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \psi$

Prova da completude - Passo 2

Para cada linha l:
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$ se $v(\varphi) = T$
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\varphi$ se $v(\varphi) = F$

Prova por indução estrutural.
Base: $\varphi = p$, $p \vdash p$ e $\neg p \vdash \neg p$
Se $\varphi = \neg\psi$, temos dois casos:
$v(\varphi) = T \Rightarrow v(\psi) = F \Rightarrow \overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\psi \Rightarrow \overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \varphi$
$v(\varphi) = F \Rightarrow v(\psi) = T \Rightarrow \overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \psi$
Usando a regra da dupla negação,
$\overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\neg\psi \Rightarrow \overline{p_1}, \overline{p_2}, ..., \overline{p_n} \vdash \neg\varphi$

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi \Longrightarrow \vdash \chi$$

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi \Longrightarrow \vdash \chi$$

(a) Para cada linha da tabela, um sequente: se p_i é T, $\overline{p_i} = p_i$, senão, $\neg p_i$.

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi \Longrightarrow \vdash \chi$$

(a) Para cada linha da tabela, um sequente: se p_i é T, $\overline{p_i}$=p_i, senão, $\neg p_i$.

- Se χ é T, $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, ..., $\overline{p_n} \vdash \chi$

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi \Longrightarrow \vdash \chi$$

(a) Para cada linha da tabela, um sequente: se p_i é T, $\overline{p_i}$=p_i, senão, $\neg p_i$.

- Se χ é T, $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, ..., $\overline{p_n} \vdash \chi$
- Senão, $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, ..., $\overline{p_n} \vdash \neg\chi$

Prova da completude - Passo 2

$$\models \chi \Longrightarrow \vdash \chi$$

(a) Para cada linha da tabela, um sequente: se p_i é T, $\overline{p_i} = p_i$, senão, $\neg p_i$.
- Se χ é T, $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, ..., $\overline{p_n} \vdash \chi$
- Senão, $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$, ..., $\overline{p_n} \vdash \neg\chi$

(b) Juntar os sequentes em uma única prova. (Ex.: $\vdash p \wedge q \rightarrow p$)

Equivalência Lógica

$p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$ têm a "mesma" tabela verdade.

Equivalência Lógica

$p \to q$ e $\neg p \vee q$ têm a "mesma" tabela verdade.

Mas e $p \wedge q \to p$ e $r \vee \neg r$?

Equivalência Lógica

$p \to q$ e $\neg p \vee q$ têm a "mesma" tabela verdade.

Mas e $p \wedge q \to p$ e $r \vee \neg r$?

Definição

$\varphi \equiv \psi$ *sse* $\varphi \models \psi$ *e* $\psi \models \varphi$.

Equivalência Lógica

$p \to q$ e $\neg p \vee q$ têm a "mesma" tabela verdade.

Mas e $p \wedge q \to p$ e $r \vee \neg r$?

Definição

$\varphi \equiv \psi$ *sse* $\varphi \models \psi$ *e* $\psi \models \varphi$.

Exemplos:

- $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

Equivalência Lógica

$p \to q$ e $\neg p \vee q$ têm a "mesma" tabela verdade.

Mas e $p \wedge q \to p$ e $r \vee \neg r$?

Definição

$\varphi \equiv \psi$ *sse* $\varphi \models \psi$ *e* $\psi \models \varphi$.

Exemplos:

- $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
- $p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$

Validade de fórmulas

Ideia: Transformar em formato mais fácil para testar validade.

Validade de fórmulas

Ideia: Transformar em formato mais fácil para testar validade.

Exemplo: $p \wedge q \to p$ e $r \vee \neg r$

Validade de fórmulas

Ideia: Transformar em formato mais fácil para testar validade.

Exemplo: $p \wedge q \rightarrow p$ e $r \vee \neg r$

Generalizando: $\varphi \vee p \vee \neg p \vee \psi$ é válida!

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal: um átomo ou sua negação. $L ::= p|\neg p$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$
- $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$
- $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$
- $(\neg(p \vee q) \vee r) \wedge (q \vee r)$

Forma Normal Conjuntiva (FNC/CNF)

Literal:	um átomo ou sua negação.	$L ::= p \mid \neg p$
Cláusula:	disjunção de literais.	$D ::= L \mid L \vee D$
CNF:	conjunção de cláusulas.	$C ::= D \mid D \wedge C$

Exemplos:

- $(\neg q \vee p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge q$
- $(p \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$
- $\cancel{(\neg(p \vee q) \vee r) \wedge (q \vee r)}$

Por que CNF?

1. Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.

Por que CNF?

1. Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.
2. Uma cláusula é válida sse ela contém um átomo e sua negação.

Por que CNF?

1. Uma fórmula em CNF é válida sse todas as suas cláusulas são válidas.
2. Uma cláusula é válida sse ela contém um átomo e sua negação.

(φ é satisfatível sse $\neg\varphi$ não é válida)

Transformar em CNF - Tabela Verdade

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \vee \neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Transformar em CNF - Tabela Verdade

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$q \vee \neg p$	$(p \to \neg q) \to (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

$v((p \to \neg q) \to (q \vee \neg p) = F$ apenas quando $v(p) = T$ e $v(q) = F$

Transformar em CNF - Tabela Verdade

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \vee \neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

$v((p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p) = F$ apenas quando $v(p) = T$ e $v(q) = F$

$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p) \equiv \neg p \vee q$

Exemplo

$(p \vee \neg q) \rightarrow r$

p	q	r	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F
T	T	T	F	T	T

Exemplo

$(p \vee \neg q) \rightarrow r$

p	q	r	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow r$
F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F
T	T	T	F	T	T