Lista 3 - Otimização Não Linear

1. Seja f uma função quadrática dada por $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + b^Tx + c$ com Hessiana Q definida positiva. Prove que se ao aplicarmos o método do gradiente a partir de um certo x^0, $\nabla f(x^0) \neq 0$, encontramos a solução em uma iteração, então $d = x^1 - x^0$ é um autovetor da Hessiana.

2. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{2}x^TAx + b^Tx + c$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz simétrica definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$.

   a) Mostre que se $\nabla f(x)^T d = 0$, então d é uma direção de subida a partir de x.

   b) Suponha que d é uma direção de descida a partir de x. Mostre que a busca exata fornece $t^* = -\dfrac{\nabla f(x)^T d}{d^TAd}$.

   c) Mostre que se t^* satisfaz a condição de Armijo
   $$f(x + t^*d) \leq f(x) + \eta t^* \nabla f(x)^T d,$$
   então $\eta \leq \dfrac{1}{2}$.

3. No processo de minimizar uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, a iteração x^k foi obtida fazendo um busca linear ao longo da direção d^{k-1}. Determine uma direção d^k ortogonal a d^{k-1}, de descida a partir de x^k e que seja uma combinação linear de d^{k-1} e $\nabla f(x^k)$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Defina $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$, onde $t_k \geq \bar{t} > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $x^k \to \overline{x}$. Prove que $\nabla f(\overline{x}) = 0$.

5. Seja $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(1 - x_1)^2$. Qual é o minimizador de f? Faça uma iteração do Método de Newton para minimizar f a partir de $x^0 = (2, 2)$. É um bom passo? Antes de decidir, calcule $f(x^0)$ e $f(x^1)$.

6. O método de Newton pode convergir para um maximizador local. Para verificar esta afirmação, use o método de Newton para minimizar a função $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2$ a partir de $x^0 = 1$ e tomando o tamanho do passo como sendo $t = 1$. O que acontece com o método de Newton quando aplicado à minimização de $f(x) = \frac{x^3}{3} + x$?

7. Seja $f(x) = x_1^4 + x_1x_2 + (1 + x_2)^2$. Para $x^0 = (0, 0)$, porque o método de Newton não pode ser aplicado satisfatoriamente? Se a direção $d^0 = -(\nabla^2 f(x^0))^{-1}\nabla f(x^0)$ é usada, mostre que nem d^0 e nem $-d^0$ são direções de descida.

8. No método de Newton é necessário que a matriz Hessiana seja definida positiva. Na prática devemos modificar o método quando falha essa hipótese. Uma idea é tomar
   $$M^k = (\nabla^2 f(x^k) + \rho_k I)^{-1}, \rho_k > 0,$$
   e definir
   $$d^k := -M^k \nabla f(x^k).$$

   a) Qual a melhor estratégia para verificar se $\nabla^2 f(x^k)$ não é definida positiva?

   b) Quais são os valores aceitáveis de ρ_k para garantir que o método gere direções de descida?

9) e 10): Seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ uma função contínua que associa a cada $x \in \mathbb{R}^n$ uma matriz definida positiva $H(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para as próximas duas questões, considere o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$

REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

  Defina $d^k = -H(x^k)\nabla f(x^k)$

  Obtenha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$

  Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$

  $k = k + 1$

9. Mostre que o Algoritmo 1 com tamanho do passo calculado pela busca linear exata é globalmente convergente, isto é, para qualquer sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 1 e qualquer ponto de acumulação $\overline{x}$ de $\{x^k\}$, temos que $\nabla f(\overline{x}) = 0$.

10. Mostre que o Algoritmo 1 com tamanho do passo calculado pela condição de Armijo é globalmente convergente, isto é, para qualquer sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 1 e qualquer ponto de acumulação $\overline{x}$ de $\{x^k\}$, temos que $\nabla f(\overline{x}) = 0$.