Aula 08 - Probabilidade

Probabilidade

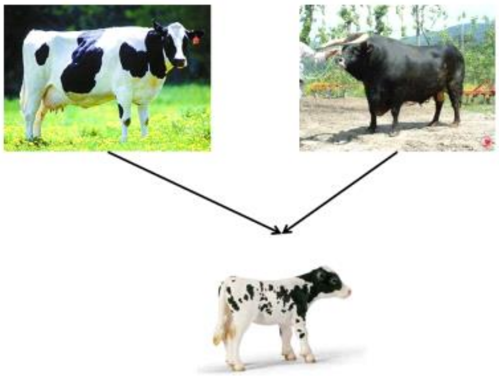
Medida de incerteza em termos de escala numérica.

Experimento Aleatório

são experimentos que, quando repetidos em condições similares, dão resultados geralmente diferentes.

Exemplos:

- Cruzar dois animais e observar o sexo do primeiro que nascer;



- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;

- Lançar duas moedas e observas as faces voltadas para cima;

- Colocar 20 sementes em um germinador e contar, após determinado tempo, o número de sementes germinadas;

- Observar uma amostra de n tomates quanto ao número de tomates com defeitos graves;

- Coletar uma amostra de 100 tilápias de um lago e observar o número de fêmeas;

- Medir a produção de uma parcela de cana-de-açúcar;

- Medir a altura de uma árvore;

Espaço Amostral

é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Cada um de seus elementos chama-se ponto amostral.
Notação: Ω.

Os espaços amostrais podem ser **discretos** ou **contínuos**.

- Um espaço amostral é discreto quando podemos enumerar todos os resultados do experimento;
- Um espaço amostral é contínuo quando não podemos enumerar todos os resultados

Exemplos:

- Cruzar dois animais e observar o sexo do primeiro que nascer;

$\Omega = \{$macho, fêmea$\}$

$\Omega = \{\text{macho}, \text{fêmea}\}$

- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima;

$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$

- Lançar duas moedas e observas as faces voltadas para cima;

$\Omega = \{(\text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}, \text{coroa}), (\text{coroa}, \text{cara}), (\text{coroa}, \text{coroa})\}$

- Colocar 20 sementes em um germinador e contar, após determinado tempo, o número de sementes germinadas;

$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$

- Observar uma amostra de n tomates quanto ao número de tomates com defeitos graves;

$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

- Coletar uma amostra de 100 tilápias de um lago e observar o número de fêmeas;

$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 100\}$

- Medir a produção de uma parcela de cana-de-açúcar;

$\Omega = (0, 1000)$ kg

- Medir a altura de uma árvore;

$\Omega = (0, 6]$ metros

Evento

Os eventos são subconjuntos do espaço amostral Ω, ou seja, são conjuntos dos resultados de um experimento.
Notação: A, B, $C, \dots$

Exemplos:

$\Omega = \{0, 1, \dots, 20\}$

- Observar o número de sementes germinadas maior ou igual a 15

$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

- Observar a porcentagem de germinação maior do que 80%

$B = (80, 100]\%$

- Observar árvores com altura superior a 3 metros

$\Omega = (0,6)$ metros

$C = (3,6)$ metros

- Observar árvores com altura entre 3 e 6 metros

$D = (3,6]$ metros

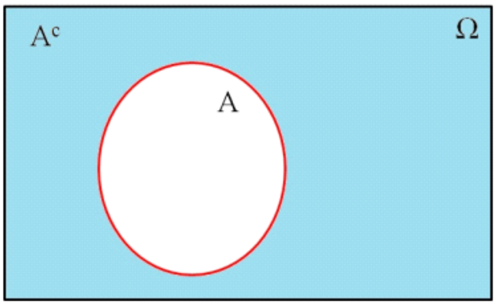
- **Evento certo**: $A = \Omega$.

  Colocar 20 sementes no germinador e observar 20 sementes ou menos germinadas.

- **Evento impossível**: $A = \emptyset$.

  Colocar 20 sementes no germinador e observar mais do que 20 sementes germinadas.

- **Evento complementar**: O complementar de um evento A é o conjunto de pontos amostrais que não pertencem a A. Notação: $\bar{A}$ ou A^c.



$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

A = Observar o número de sementes germinadas maior ou igual a 15.
A^c = Observar o número de sementes germinadas menor do que 15.

$\bar{A} = \{1, 2, \ldots, 14\}$ $\quad P(A) + P(\bar{A}) = 1$

União

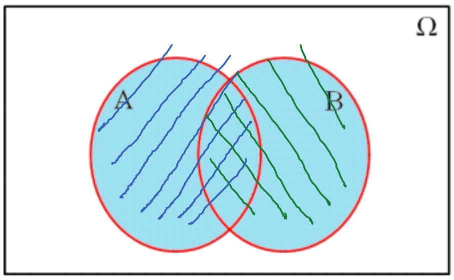
A **união** de dois eventos A e B é o conjunto de todos os elementos amostrais que estão em A, em B ou em ambos.
Notação: $A \cup B$.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Notação: $A \cup B$.

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{3,4,5,6,7\}$

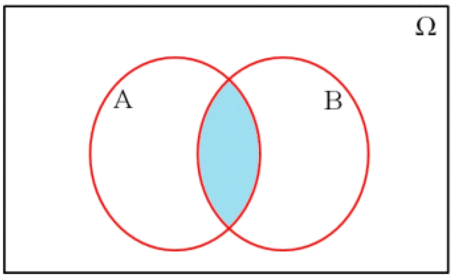


$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$A + B - A \cap B$

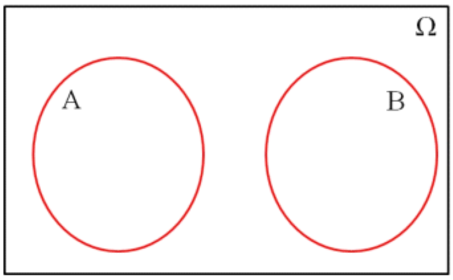
Interseção

A **interseção** de dois eventos A e B é o conjunto de todos os elementos amostrais que estão em A e estão em B.
Notação: $A \cap B$.



Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos são mutuamente exclusivos se eles não têm elementos amostrais em comum, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$, ou ainda, se eles não podem ocorrer simultaneamente.



Exemplo: Considere o experimento lançamento de dois dados e a observação dos números obtidos. Considere ainda os seguintes eventos:

A: Soma dos valores igual a 7;
B: Resultado do primeiro dado igual a 6;
C: Os resultados nos dois dados são iguais;
D: Soma nos dois dados é 2;

Construir o espaço amostral.

$n(\Omega) = 36$

Construir o espaço amostral.

Espaço amostral.

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

$n(\Omega) = 36$

$A = \{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\}$

$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$D = \{(1,1)\}$

$n(A) = 6$

$n(B) = 6$

$n(C) = 6$

$n(D) = 1$

Quais eventos são mutuamente exclusivos? $\rightarrow A \cap B = \emptyset$

A e C , A e D , B e D

Definição Clássica

Seja $A \subset \Omega$, então

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{\text{número de resultados favoráreis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

- Os resultados são equiprováveis;
- O espaço amostral é discreto e finito

Exemplo: No lançamento de dois dados honestos (resultados equiprováveis), calcular a probabilidade dos seguintes eventos:

A: Soma dos valores igual a 7; $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1667$

B: Resultado do primeiro dado igual a 6; $P(B) = \frac{1}{6}$

C: Os resultados nos dois dados são iguais; $P(C) = \frac{1}{6}$

D: Soma nos dois dados é 2; $P(D) = \frac{1}{36} = 0{,}0278$

Definição Frequentista

Outro método de definir probabilidade é o da frequência relativa. Pode-se definir $P(A)$ como o limite da frequência relativa da ocorrência de A em n repetições independentes do experimento, com n tendendo ao infinito, ou seja,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (\text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ repetições do experimento})$$

Exemplo: Suponha que queremos estudar as proporções de indivíduos de genótipo AA, Aa e aa, resultantes do experimento cruzamento de dois indivíduos heterozigostos. Um primeiro procedimento seria realizar esse experimento um certo número de vezes (n) e observar as frequências de cada um dos genótipos. Tal como:

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

$\Omega = \{AA, Aa, Aa, aa\}$

$n(\Omega) = 4$

$A = aa$

$n(A) = 1$

$P(A) = \frac{1}{4}$

- Para $n = 10$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	1	0,10
Aa	7	0,70
aa	2	0,20
Total	10	1,00

- Para $n = 100$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	29	0,29
Aa	48	0,48
aa	23	0,23
Total	100	1,00

- Para $n = 1000$

Genótipo	Número de casos	Frequência relativa
AA	263	0,263
Aa	495	0,495
aa	242	0,242
Total	1000	1,00

- Para $n \to \infty$

Genótipo	Probabilidade
AA	0,25
Aa	0,50
aa	0,25
Total	1,00

Quando n tende ao infinito ($n \to \infty$) a frequência relativa parece se aproximar de um certo limite.

Chamamos esta propriedade empírica de <u>estabilidade da frequência relativa</u>.

Observamos que a forma pela qual a frequência relativa se aproxima do limite é bastante irregular. O limite para o qual tende a frequência relativa é denominado ***probabilidade****.*

Exemplo: Suponha que o quadro seguinte represente uma possível divisão dos alunos do primeiro ano, da ESALQ, no ano de 1998. Supondo que um aluno não pode estar matriculado em mais de um curso ao mesmo tempo.

$A \cap F = \emptyset$

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Considere o experimento escolha ao acaso de um aluno do primeiro ano e verificar qual curso está cursando e a qual sexo pertence
- Considere ainda os seguintes eventos:
  - H: ser do sexo masculino
  - M: ser do sexo feminino
  - A: estar cursando Engenharia Agronômica
  - F: estar cursando Engenharia Florestal
  - E: estar cursando Economia Agroindustrial

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(H) = \frac{205}{265} = 0,7736$
- $P(M) = \frac{60}{265} = 0,2264$
- $P(A) = \frac{200}{265} = 0,7547$
- $P(F) = \frac{40}{265} = 0,1510$
- $P(E) = \frac{25}{265} = 0,0943$
- $P(\Omega) = \frac{265}{265} = 1$

$P(H \cap A) = \frac{160}{265} = 0,6038$

Sexo	Curso Engenharia Agrônomica (A)	Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

$P(A \cap F) = 0$

$P(A \cap E) = 0$

Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(A \cup F) = P(A) + P(F) - P(A \cap F)$
  $= 0,7547 + 0,1510$
  $= 0,9057$
- $P(H \cup M) = 1$
- $P(H \cap M) = 0$
- $P(M \cap E) = \frac{10}{265} = 0,0377$
- $P(H \cup A) = P(H) + P(A) - P(H \cap A)$
  $= 0,7736 + 0,7547 - 0,6038$
  $= 0,9245$
- $P(A^c) = P(F) + P(E) = 0,1510 + 0,0943 = 0,2453$

- $P(H \cap M)$ $= 0$

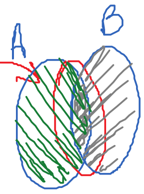
- $P(A^c)$ $= P(F) + P(E) = 0{,}1510 + 0{,}0943 = 0{,}2453$

$P(A) = \frac{200}{265} = 0{,}7547$ ou $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7547 = 0{,}2453$

Propriedades

Se A e B são dois eventos do espaço amostral Ω, então valem as seguintes regras básicas:

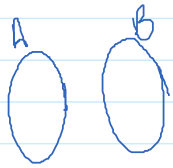
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$



Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então:

$P(A \cap B) =$ 0

$P(A \cup B) =$ $P(A) + P(B)$



$P(A/B)$ de A acontecer; B acontecer; dado que

Sexo	Engenharia Agrônomica (A)	Curso Engenharia Florestal (F)	Economia Agroindustrial (E)	Total
Masculino (H)	160	30	15	205
Feminino (M)	40	10	10	60
Total	200	40	25	265

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade dele ser do sexo masculino (H)?

$P(H|F) = \frac{30}{40} = 0{,}7500$ $\quad P(H/F) = \frac{P(H \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{30}{\cancel{265}}}{\frac{40}{\cancel{265}}}$

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade dele estar cursando Engenharia Agronômica?

$P(A/M) = \frac{40}{60} = 0{,}6667$

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$P(F|M) = \frac{10}{60} = 0{,}1667$

Observe o seguinte...

- Dado que o aluno escolhido ao acaso esteja cursando Engenharia Florestal (F), qual é a probabilidade dele ser do sexo masculino (H)?

$$P(H|F) = \frac{30}{40} = 0,7500$$

$$= \frac{\frac{30}{265}}{\frac{40}{265}} = \frac{P(H \cap F)}{P(F)}$$

- Dado que o aluno escolhido ao acaso é do sexo feminino (M), qual é a probabilidade dele estar cursando Engenharia Agronômica (A)?

$$P(A|M) = \frac{40}{60} = 0,6667$$

$$= \frac{\frac{40}{265}}{\frac{60}{265}} = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$$

- Qual é a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso estar cursando Engenharia Florestal (F) dado que ele é do sexo feminino (M)?

$$P(F|M) = \frac{10}{60} = 0,1667$$

$$= \frac{\frac{10}{265}}{\frac{60}{265}} = \frac{P(F \cap M)}{P(M)}$$

Definição de probabilidade condicional $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$?

Sendo assim...

Definição

Dados dois eventos quaisquer, A e B, sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A dado B, como sendo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B)$$

Observação:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

Regra do Produto

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$
$$= P(A) \times P(B|A)$$

Exemplo: Uma urna contém ~~três bolas brancas~~ e ~~duas bolas~~ pretas de onde foram feitas duas extrações de 1 bola ao acaso e **sem reposição**. Considere os seguintes eventos:

- B_1: sair bola branca na primeira extração
- B_2: sair bola branca na segunda extração
- P_1: sair bola preta na primeira extração
- P_2: sair bola preta na segunda extração

Os eventos B_1 e B_2 são independentes? não

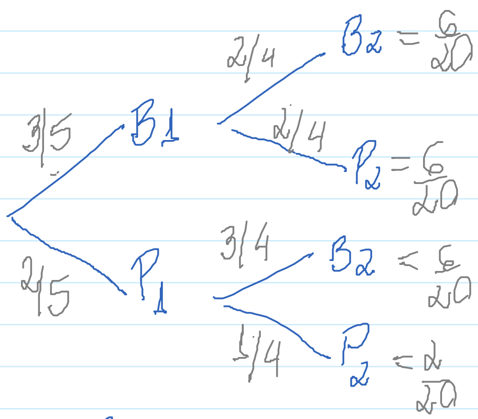
Os eventos P_1 e P_2 são independentes? não

Os eventos P_1 e B_2 são independentes? não

Pede-se:

(a) calcular a probabilidade de sair bola branca na primeira extração e preta na segunda extração; $P(B_1 \cap P_2) = P(B_1).P(P_2/B_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

(b) construir o espaço amostral e indicar as probabilidades associadas a cada um dos pontos amostrais.



$P(B_1) = \frac{3}{5}$ $\quad P(P_1) = \frac{2}{5}$

$P(B_2/B_1) = \frac{2}{4}$ $\quad P(P_2/B_1) = \frac{2}{4}$

$P(B_2/P_1) = \frac{3}{4}$ $\quad P(P_2/P_1) = \frac{1}{4}$

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2/B_1)$

$1/4 \cdot P_2 = \frac{2}{20}$

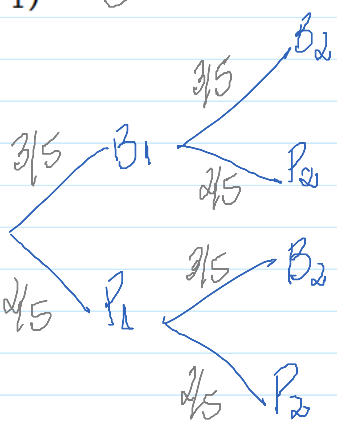
$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1)$
$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

Possib	Probab
$B_1 . B_2$	$6/20$
$B_1 . P_2$	$6/20$
$P_1 . B_2$	$6/20$
$P_1 . P_2$	$2/20$
	$20/20 = 1$

Exercício: Consideremos o mesmo caso anterior, porém **com reposição** da primeira bola extraída antes da extração da segunda bola.
Calcular as seguintes probabilidades:

- $P(B_2)$ $= \frac{3}{5}$
- $P(P_2)$ $= \frac{2}{5}$
- $P(B_2|B_1)$ $= \frac{3}{5}$
- $P(B_2|P1)$ $= \frac{3}{5}$
- $P(P_2|B_1)$ $= \frac{2}{5}$
- $P(P_2|P_1)$ $= \frac{2}{5}$

$P(B_1) = 3/5$



$B_2 \rightarrow P(B_2 | B_1) = \frac{3}{5}$

Note que:

B_2 e B_1 são eventos independentes e que $P(B_2|B_1) = P(B_2)$

B_2 e P_1 são eventos independentes e que $P(B_2|P_1) = P(B_2)$

P_2 e B_1 são eventos independentes e que $P(P_2|B_1) = P(P_2)$

P_2 e P_1 são eventos independentes e que $P(P_2|P_1) = P(P_2)$

Generalizando,

se dois eventos, A e B, são independentes, temos que

$$P(A|B) = P(A) \qquad \text{ou} \qquad P(B|A) = P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pela regra do produto de probabilidades:

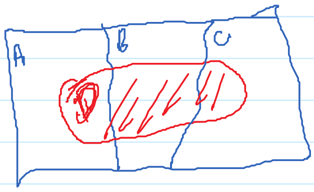
$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$
$$= P(A) \times P(B|A)$$

Independência

Dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Observação: Dois eventos são mutuamente exclusivos se, e somente se, $P(A \cap B) = 0$



Teorema de Bayes

Exemplo

Temos três profissionais: um engenheiro agrônomo, um biólogo e um engenheiro civil. Cada um deles plantou dez mudas de álamos em vasos numa casa de vegetação. Sobreviveram nove das plantadas pelo engenheiro agrônomo, cinco pelo biólogo e duas pelo engenheiro civil. Dos trinta vasos, escolhe-se um ao acaso, e verifica-se se a muda sobreviveu. Se ela sobreviveu, qual é a probabilidade de ela ter sido plantada pelo engenheiro agrônomo? $\rightarrow P(A|S) = ?$

Sejam os eventos:

S: a muda sobreviver

A: muda plantada pelo Engenheiro Agrônomo

B: muda plantada pelo Biólogo

C: Muda plantada pelo Engenheiro Civil

$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ $\qquad P(S|A) = \frac{9}{10} = 0{,}9$

$P(B) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(S|B) = \frac{5}{10} = 0{,}5$

$P(C) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(S|C) = \frac{2}{10} = 0{,}2$

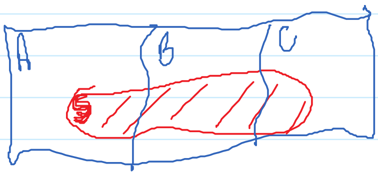
$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)}$$

$P(A \cap S) = P(A) . P(S|A)$ ← eu tenho $\quad$ → $P(A \cap S) = P(A) . P(S|A)$

$P(A \cap S) = 1/3 . 0{,}9$

ou

$P(A \cap S) = P(S) . P(A|S)$ ← o que eu quero



$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S)$

$P(S) = P(A).P(S|A) + P(B).P(S|B) + P(C).P(S|C)$

$P(S) = 1/3 . 0{,}9 + 1/3 . 0{,}5 + 1/3 . 0{,}2$

Voltando...

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{1/3 . 0{,}9}{1/3 . 0{,}9 + 1/3 . 0{,}5 + 1/3 . 0{,}2}$$

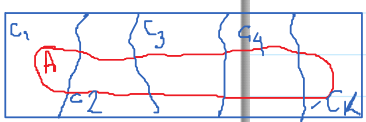
$P(A|S) = 0{,}5625$

Generalizando...

Teorema de Bayes

Suponha que os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formem uma partição do espaço amostral, Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento A, se conheçam as probabilidades condicionais, $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Então, para qualquer j,

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)}.$$



Exemplo 2:

Um geólogo com base em observações superficiais, estabelece que a probabilidade de *haver petróleo (evento A_1) em uma área qualquer é 0,2. Em áreas que sabe-se que há petróleo, realizou um teste sísmico que pode resultar em três resultados mutuamente exclusivos B, C ou D e estima as seguintes probabilidades:*

$P(B|A_1) = 0{,}7$

$P(C|A_1) = 0{,}2$

$P(D|A_1) = 0{,}1$

$P(A_1) = 0{,}2 \quad P(A_2) = 0{,}8$

Nas áreas em que não há petróleo (evento A_2), realiza o mesmo teste e determina:

$P(B|A_2) = 0{,}1$

$P(C|A_2) = 0{,}4$

$P(D|A_2) = 0{,}5$

O geólogo realiza o teste sísmico em uma área qualquer. Calcular as probabilidades

a) de sair o resultado B:

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$

$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2)$

$P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8$

$P(B) = 0{,}22$

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$

ou $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$

b) de haver petróleo na área, sabendo-se que saiu o resultado B:

$P(A_1|B) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}2}{0{,}22}$

$P(A_1/B) = 0{,}6364$

$P(C/B) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(B)} \quad P(B \cap C) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$

Exemplo 3:

Uma água é contaminada se forem encontrados bacilos tipo A ou tipo B e C, simultaneamente. As probabilidade de se encontrarem bacilos tipo A, B e C são, respectivamente, 0,30, 0,20 e 0,80. Existindo bacilos do tipo A não existirão bacilos tipo B. Existindo bacilos tipo B, a probabilidade de existirem bacilos tipo C é reduzida à metade. Calcular:

a) • a probabilidade de ocorrer bacilos tipo B ou C ou ambos;

b) • a probabilidade de a água estar contaminada;

$P(B/A_4)$?

$P(A) = 0{,}3 \quad P(B) = 0{,}2 \quad P(C) = 0{,}8$

$P(A \cap B) = 0 \quad P(C/B) = 0{,}4$

$P(B) = \sum P(B/A_i)\, P(A_i)$

$P(A\cap C) = 0$ $\quad P(C|D) = 0,1$

$P(B) = \sum P(B/A_i) \cdot P(A_i)$

a) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$P(B \cup C) = 0,2 + 0,8 - 0,08$

$P(B \cup C) = 0,92$

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|C_i)P(C_i)}.$$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C|B)$

$P(B \cap C) = 0,2 \cdot 0,4$

$P(B \cap C) = 0,08$

b) $P(\text{cont}) = P(A \cup (B \cap C))$

$P(\text{cont}) = P(A) + P(B \cap C) - P(\cancel{A \cap (B\cap C)})$ $\quad 0$

$P(\text{cont}) = 0,3 + 0,08 - 0$

$P(\text{cont}) = 0,38$

Exercícios:

1 Dados dois eventos B e C, tais que, $P(B) = 0,6$, $P(C) = 0,3$ e $P(B \cap C) = 0,20$, verifique se B e C são independentes.

$P(B/C) = P(B)$ $\qquad P(C|B) = P(C)$

$P(B/C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)}$

$P(B/C) = \dfrac{0,2}{0,3} = 0,6667 \neq P(B) = 0,6$

ou

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

$= 0,6 \cdot 0,3 = 0,18 \neq P(B \cap C) = 0,20$

∴ Os eventos B e C não são independentes

Se independentes

$P(A)$

$P(A/\cancel{B}) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

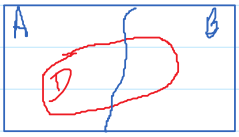
2. *Uma empresa de telefonia celular possui duas máquinas A e B. 54% dos celulares produzidos são fabricados pela máquina A e os demais pela máquina B. Nem todos os celulares produzidos estão em boas condições. A proporção de telefones celulares defeituosos fabricados por A é de 0,2 e por B é de 0,5.*

$P(A) = 0,54$ $\qquad P(B) = 0,46$

celulares produzidos estão em boas condições. A proporção de telefones celulares defeituosos fabricados por A é de 0,2 e por B é de 0,5.

$P(A) = 0{,}54$ $\quad P(B) = 0{,}46$

$P(D/A) = 0{,}2$ $\quad P(D/B) = 0{,}5$



a) Qual é a probabilidade de um telefone celular daquela fábrica estar com defeito?

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$

$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D/B)$

$P(D) = 0{,}54 \cdot 0{,}2 + 0{,}46 \cdot 0{,}5$

$P(D) = 0{,}338$

b) Qual é a probabilidade de que, sabendo que um telefone celular esteja com defeito, ele venha da máquina A?

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B)} = \frac{0{,}54 \cdot 0{,}2}{0{,}338}$$

$P(A/D) = 0{,}3195$

c) Qual é a probabilidade de que, sabendo que um telefone celular esteja com defeito, ele venha da máquina B?

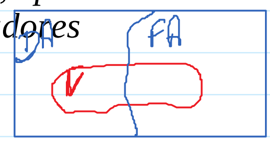
$$P(B/D) = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B)} = \frac{0{,}46 \cdot 0{,}5}{0{,}338}$$

$P(B/D) = 0{,}6805$

3. *Sabe-se que 2/3 dos minérios de uma pequena região encontram-se em localidades de difícil acesso. Nas localidades mais acessíveis (que não são de difícil acesso), apenas 10% dos minérios tem valor comercial. Nas localidades de difícil acesso, pesquisadores estimam que 20% dos minérios tenham valor de comércio.*

$P(DA) = 2/3$ $\quad P(FA) = 1/3$

$P(V/DA) = 0{,}20$ $\quad P(V/FA) = 0{,}10$



a) Qual é o percentual de minérios com algum valor comercial em toda a região, considerando como correta a estimativa dos pesquisadores?

a) Qual é o percentual de minérios com algum valor comercial em toda a região, considerando como correta a estimativa dos pesquisadores?

$$P(V) = P(V/DA) \cdot P(DA) + P(V/FA) \cdot P(FA)$$

$$P(V) = 0{,}2 \cdot 2/3 + 0{,}10 \cdot 1/3$$

$$P(V) = 0{,}1667$$

b) Qual é a probabilidade de que um minério sorteado ao acaso tenha vindo de uma localidade de difícil acesso dado que é um minério com valor comercial?

$$P(DA/V) = \frac{P(DA \cap V)}{P(V)} = \frac{P(DA) \cdot P(V/DA)}{P(V)} = \frac{0{,}2 \cdot 2/3}{0{,}1667}$$

$$P(DA/V) = 0{,}8$$