Nome: **No. USP:**

Prova I (7600028)

① Um observador inercial $\mathcal{O}$ envia um sinal de rádio para um outro observador inercial, $\widetilde{\mathcal{O}}$, avisando-o que estão em rota de colisão. Apesar do aviso, nem observador $\widetilde{\mathcal{O}}$, nem observador $\mathcal{O}$, alteram suas velocidades. Sejam p, q e r respectivamente os eventos "emissão do sinal por $\mathcal{O}$", "recepção do sinal por $\widetilde{\mathcal{O}}$" e "colisão".

(a) Represente essa sitação física num diagrama espaço-tempo, deixando claros os eventos p, q e r e os elementos (linhas-de-mundo, raios de luz) que os determinam; **(1,0 ponto)**

(b) Se τ é o tempo decorrido para $\mathcal{O}$ entre a emissão do sinal e a colisão e $\tilde{\tau}$ é o tempo decorrido para $\widetilde{\mathcal{O}}$ entre a recepção do sinal e a colisão, calcule a velocidade relativa entre $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ em termos de τ e $\tilde{\tau}$ (e c). **(1,0 ponto)**

② Considere os observadores inerciais $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ padrões, caracterizados pelas tetradas $\{\mathbf{e}^a_\mu\}$ e $\{\widetilde{\mathbf{e}}^a_\mu\}$, respectivamente — relacionadas pelas equações do Formulário. No evento p em que as linhas-de-mundo de $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ se cruzam, ambos observam um fóton que $\mathcal{O}$ descreve como tendo vindo da direção (espacial) alinhada com $\mathbf{e}^a_2$. Sendo ℓ^a o 4-vetor que representa a direção de propagação desse fóton no espaço-tempo, pede-se:

(a) Escreva ℓ^a em termos da base tetrada que caracteriza $\mathcal{O}$; **(0,5 ponto)**

(b) Calcule o ângulo $\widetilde{\theta}$ que o observador $\widetilde{\mathcal{O}}$ mede entre a direção (espacial) de onde esse fóton chegou e a direção dada por $\widetilde{\mathbf{e}}^a_1$; **(1,0 ponto)**

(c) A frequência do fóton medida por um observador qualquer é proporcional à projeção de ℓ^a na direção puramente temporal do observador: $f \propto g_{ab}\mathbf{e}^a_0\ell^b$ (e a constante de proporcionalidade independe de observador). Sendo assim, obtenha a relação entre as frequências f e $\widetilde{f}$ que os observadores $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ atribuem para esse fóton. **(1,0 ponto)**

③ Considere a família de linhas-de-mundo dada, em relação a um evento $o \in \mathbb{M}$ arbitrário, por

$$x^a(t;\sigma,\lambda,\zeta) := t\,(\mathbf{e}_0^a + \sigma\mathbf{e}_1^a + \lambda\mathbf{e}_2^a + \zeta\mathbf{e}_3^a)\,,$$

onde $\{\mathbf{e}_\mu^a\}_{\mu=0,\ldots,3}$ é uma base tetrada de $\mathbb{V}$ e t é o parâmetro ao longo de *cada* linha-de-mundo indexada por valores *fixos* de (σ,λ,ζ).

(a) Qual a restrição que se deve impor nos parâmetros σ,λ,ζ para que as linhas-de-mundo acima representem observadores físicos? **(0,5 ponto)**

(b) Reparametrize essas linhas-de-mundo de modo que o parâmetro sobre cada linha-de-mundo seja seu tempo-próprio τ; **(1,0 ponto)**

(c) Calcule a 4-velocidade e a 4-aceleração de cada linha-de-mundo; **(0,5 ponto)**

(d) Mostre que a hipersuperfície $\Sigma_\tau := \{p \in \mathbb{M}/\ \mathcal{I}(p,o) = -c^2\tau^2\}$ (onde $\mathcal{I}$ é o intervalo invariante) é localmente espacial para todos os membros dessa família de observadores. **(1,0 ponto)**

④ Dois irmãos gêmeos, A e B, se separam num certo instante, sendo que A parte numa viagem espacial, enquanto que B permanece inercial. Decorrido um intervalo de tempo T para B, ambos voltam a se encontrar. Considere que a linha-de-mundo de A seja dada por

$$x_A^a(\tau) = k\,[\sinh(b\tau)\mathbf{e}_0^a + \cosh(b\tau)\mathbf{e}_1^a]$$

em termos de uma base tetrada fixa $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$, com k e b constantes.

(a) Se τ é o tempo próprio de A, determine o vínculo entre k e b? **(1,0 ponto)**

(b) Calcule a aceleração-própria $a = \sqrt{a^a a_a}$ de A; **(0,5 ponto)**

(c) Calcule o tempo de viagem decorrido para A? **(1,0 ponto)**

- ***<u>Formulário</u>:***

$$
\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{e}}^a_0 \\ \widetilde{\mathbf{e}}^a_1 \\ \widetilde{\mathbf{e}}^a_2 \\ \widetilde{\mathbf{e}}^a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma V/c & 0 & 0 \\ \gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^a_0 \\ \mathbf{e}^a_1 \\ \mathbf{e}^a_2 \\ \mathbf{e}^a_3 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{e}^a_0 \\ \mathbf{e}^a_1 \\ \mathbf{e}^a_2 \\ \mathbf{e}^a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V/c & 0 & 0 \\ -\gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{e}}^a_0 \\ \widetilde{\mathbf{e}}^a_1 \\ \widetilde{\mathbf{e}}^a_2 \\ \widetilde{\mathbf{e}}^a_3 \end{pmatrix}.
$$