Universidade de São Paulo

Aulas 13-14– 2020

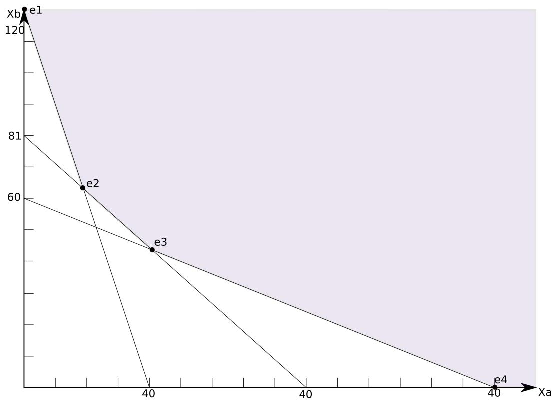
Programação Matemática Aplicada a Controle

PTC3420

Resposta do Exercício 1 Simplificando,

$$\min 100x_a + 150x_b$$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{6}x_b \geq 20 \\ \frac{3}{10}x_a + \frac{1}{3}x_b \geq 27 \\ \frac{1}{5}x_a + \frac{1}{2}x_b \geq 30 \\ x_a \geq 0, x_b \geq 0 \end{cases}$$

Colocando essas restrições em forma de gráfico temos,



Onde,

$$e_1 \rightarrow x_a = 0, x_b = 120, z = 18000$$

$$e_2 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{6}x_b = 20 \\ \frac{3}{10}x_a + \frac{1}{3}x_b = 27 \end{cases} \quad x_a = 18.5714, x_b = 64.2857, z = 11500$$

$$e_3 \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{10}x_a + \frac{1}{3}x_b = 27 \\ \frac{1}{5}x_a + \frac{1}{2}x_b = 30 \end{cases} \quad x_a = 42, x_b = 43.20, z = 10680$$

$$e_4 \rightarrow x_a = 150, x_b = 0, z = 15000$$

Pontos extremos e direções extremas:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 18.5714 \\ 64.2857 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 42 \\ 43.2 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplos do Teorema da Representação: Note que $\binom{30}{60}$ é factivel pois

$$\begin{aligned}
\frac{30}{2}+\frac{60}{6} &= 25 > 20\\
\frac{3}{10}30+\frac{60}{3} &= 29 > 27\\
\frac{1}{5}30+\frac{1}{2}60 &= 36 > 30
\end{aligned}$$

e escrevendo em função de e_1, e_2, e_3 temos que

$$\begin{pmatrix}30\\60\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 18.5714 & 42\\120 & 64.2854 & 43.2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 0.1538, \lambda_2 = 0.2364, \lambda_3 = 0.6098.$$

Temos que $\binom{100}{100}$ também é factível e uma possível representação em função dos pontos extremos e direção extrema seria:

$$\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}0\\120\end{pmatrix} + (1-\lambda_1)\begin{pmatrix}150\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

$$100 = \frac{1}{6}\times(3\times 5\times 10) + u = 25 + u \rightarrow u = 75$$

Resposta do Exercício 2 $x_i \rightarrow$ espaço reservado para o produto P_i Restrições:

$$\begin{aligned}
x_2 &\leq x_1\\
x_1 &\leq x_2 + x_3 + 3000\\
x_2 + x_3 &\geq 5000\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 2000
\end{aligned}$$

Na forma de programação linear

$$\begin{aligned}
&max\ 1000x_1 + 8000x_2 + 5000x_3\\
\text{sujeito a } &\begin{cases}-x_1 + x_2 \leq 0\\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 3000\\ x_2 + x_3 \geq 5000\\ x_1 + x_2 + x_3 = 20000\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\end{cases}
\end{aligned}$$

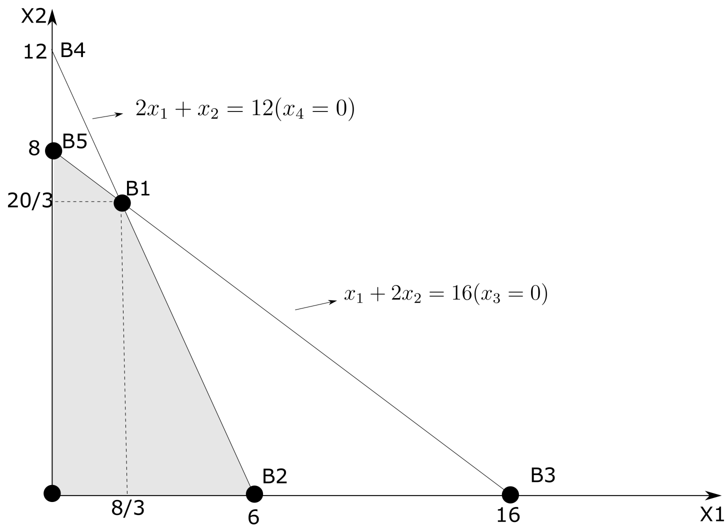
Resposta do Exercício 3

$$\begin{aligned}
&\max 2x_1 + 5x_2\\
s.a. &\begin{cases}x_1 + 2x_2 \leq 16\\ 2x_1 + x_2 \leq 12\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Com as variáveis de folga a matriz A, e o vetor b são ($m = 2$, $n = 4$, máximo de soluções básicas é $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{4.3.2}{2.2} = 6$):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Letra a)



Letra b)
Letra c)

$$B_1 = \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_2 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

$$B_3 = \begin{array}{cc} x_1 & x_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_4 = -4 \end{cases} \quad \text{não factível}$$

$$B_4 = \begin{array}{cc} x_2 & x_3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} x_2 = 12 \\ x_3 = -8 \end{cases} \quad \text{não factível}$$

$$B_5 = \begin{array}{cc} x_2 & x_4 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} x_2 = 8 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

$$B_6 = \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \\ \end{array}$$
$$B_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} x_3 = 16 \\ x_4 = 12 \end{cases}$$

Letra d) Os pontos extremos são:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \; e_4 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}.$$

Letra e) O ponto $\binom{1}{1}$ é factível: Sim, pois

$$1 + 2 = 3 \leq 16$$
$$2 + 1 = 3 \leq 12$$

e ainda

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \forall \; \lambda_i \geq 0$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{6}, \lambda_3 = \frac{1}{8}, \lambda_1 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{17}{24}$$

obtemos uma representação possível. Outra possibilidade:

$$\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_4 = \frac{3}{20}$$

$$1 = 6\lambda_2 + \frac{3}{20} \times \frac{8}{3} \rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{10}$$
$$\boxed{\lambda_1 = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{20} = 1 - \frac{5}{20} = \frac{3}{4}}$$

Letra f)

$$\begin{aligned} c'x &= 2 \times \frac{8}{3} + 5 \times \frac{20}{3} = 38.7 \\ c'x &= 2 \times 6 + 5 \times 0 = 12 \\ c'x &= 2 \times 0 + 5 \times 8 = 40 \;\; \text{ótimo} \end{aligned}$$

Letra g)

$$\max 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$
$$\text{Sujeito a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Vamos considerar $-\min -(2x_1 + 5x_2 + 3x_3)$ - Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
2	5	3	0	1	0
1	2	1	1	0	16
2	1	1	0	1	12

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	-40
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	8
$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	4

Tableau 3

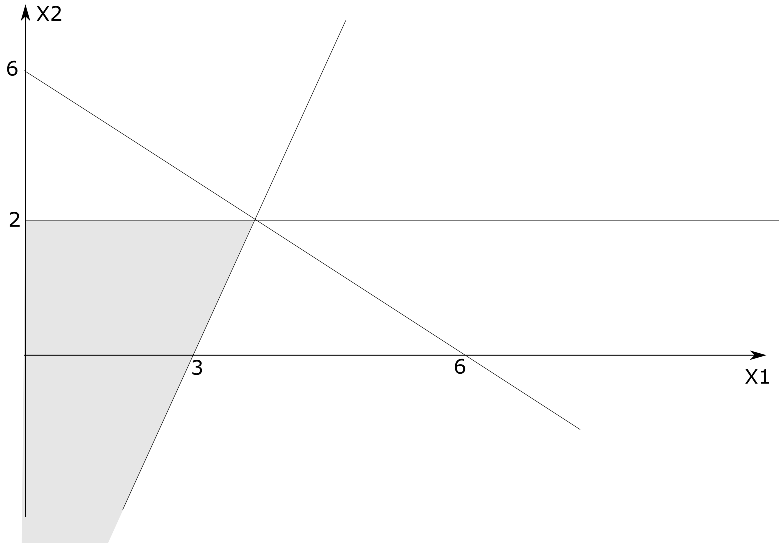
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-2	0	0	-2	-1	-44
-1	1	0	1	-1	4
3	0	1	-1	2	8

$$\text{Solução Ótima: } \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 4 \\ x_3^* = 8 \end{cases} , \qquad z^* = 5 \times 4 + 3 \times 8 = 44$$

Resposta do Exercício 4 Como

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

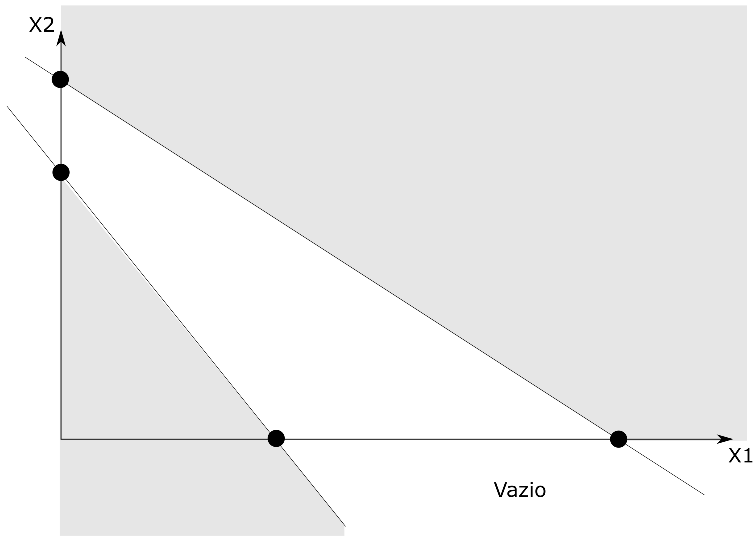
temos que a região é ilimitada.



Letra b) Como

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -12 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

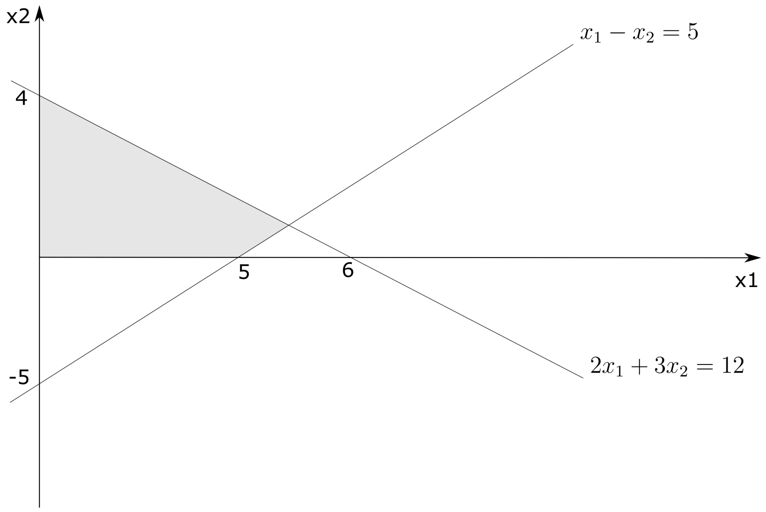
temos que a região é vazia (não existe solução factível).



Letra c) Como

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, \ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

temos que a região é limitada.



Resposta do Exercício 5 $\lambda x^* + (1-\lambda)y^*$ é factível para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$ pois

$$\begin{aligned} \lambda x^* + (1-\lambda)y^* &\geq 0 \\ A(\lambda x^* + (1-\lambda)y^*) = \lambda A x^* + (1-\lambda)Ay^* &= \lambda b + (1-\lambda)b = b \end{aligned}$$

E o valor da função objetivo é constante e igual ao valor ótimo z^* pois

$$z^* = c'x^* = c'y^* \to c'(\lambda x^* + (1-\lambda)y^*) = \lambda c'x^* + (1-\lambda)c'y^* = \lambda z^* + (1-\lambda)z^* = z^*.$$

Logo para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$ temos que $\lambda x^* + (1-\lambda)y^*$ também é ótimo.

Resposta do Exercício 6 Consider os seguintes casos $i)$ e $ii)$ referentes ao vetor c:
$i)$ Se $c_j > 0\ \forall j = 1, 2, \ldots, n$, então $x^* = 0$.
$ii)$ Suponha agora que $c_j < 0$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Temos 2 possibilidades $ii.a)$ e $ii.b)$: $ii.a)$ Se $a_{ij} \leq 0\ \forall i = 1, \ldots, m$ então definimos

$$z^\lambda = \begin{pmatrix} x_{0j} \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \to \lambda \text{ na j-ésima linha}, \lambda \geq x_{0j},\ \text{seque que}$$

$$\begin{cases} Az^\lambda = x_{01}a_1 + \cdots + \lambda a_j + \cdots + x_{0n}a_n \leq \\ x_{01}a_1 + \cdots + x_{0j}a_j + \cdots + x_{0n}a_n = Ax_0 < b \\ z^\lambda \geq 0 \end{cases}$$

Como $c_j < 0$ temos que

$$c'z^\lambda = c_1x_{01} + \cdots + c_j\lambda + \cdots + c_nx_{0n} \to -\infty,\ \text{quando } \lambda \to \infty$$

$ii.b)$ Suponha que $a_{ij} > 0$ para algum i, onde $1 \leq i \leq m$. Seja $y = b - Ax_0 > 0$. Portanto,

$$b - (a_1 x_{01} + a_j x_{0j} + \cdots + a_n x_{0n}) = y > 0$$

Seja

$$\epsilon = \frac{y_n}{a_{rj}} = \min \left\{ \frac{y_i}{a_{ij}}; a_{ij} > 0 \right\}$$

Segue que

$$\begin{cases} a_{ij} > 0 \to \frac{y_i}{a_{ij}} - \epsilon \geq 0 \to y_i - a_{ij}\epsilon \geq 0 \\ a_{ij} \leq 0 \to y_i - a_{ij}\epsilon \geq 0 \end{cases}$$

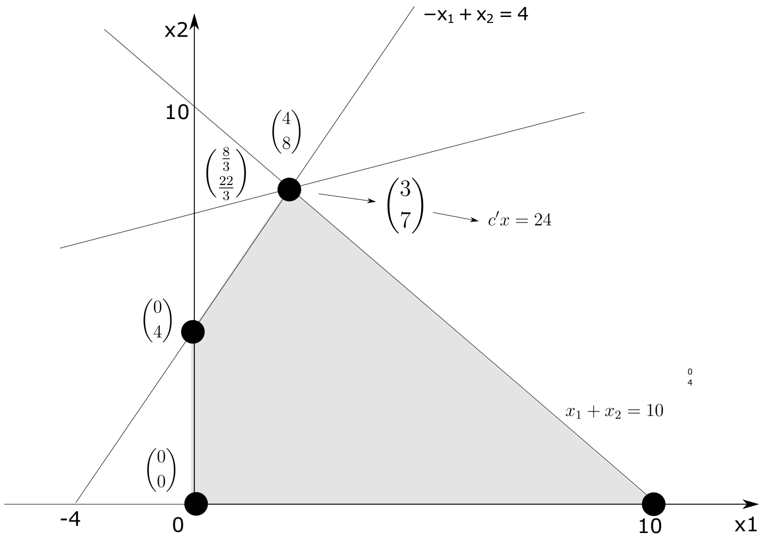
$$\begin{aligned} b - (a_1 x_{01} + \cdots + a_j(x_{0j} + \epsilon) + \cdots + a_n x_n) = \\ y - \epsilon a_{ij} \geq 0 \to A(x_0 + \epsilon e_j) \leq b, x_0 + \epsilon e_j \geq 0 \\ c'(x_0 + \epsilon e_j) = c'x_0 + \epsilon c_j < c'x_0 \to \text{logo } x_0 \text{ não pode ser ótimo} \end{aligned}$$

Resposta do Exercício 7 Letra a) O desenho não está bem feito, temos 3 soluções básicas distintas relativas à intersecção de 2 retas, sendo apenas uma delas solução básica factível (ponto extremo), fazendo $x_3 = 0$, $x_5 = 0$ (2a solução abaixo). As outras 2 soluções básicas (1a solução e 3a solução abaixo), fazendo $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, e $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, não são factíveis. Essas 3 soluções básicas são calculadas abaixo.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 12, \quad x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 10, \quad x_5 = 0 \\ \hline 3x_2 = 22 \to x_2 = \frac{22}{3}, x_1 = \frac{8}{3}, x_3 = 4 - \frac{14}{3} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4, \quad x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 10, \quad x_5 = 0 \\ \hline 2x_2 = 14 \to x_2 = 7, x_1 = 3, x_4 = 12 - 11 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 4, \quad x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 12, \quad x_4 = 0 \\ \hline x_2 = 8, x_1 = 4, x_5 = 10 - 11 = -1 \end{cases}$$



Letra b)

$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \lambda_i \geq 0$$

e com $c = \binom{1}{3}$, segue que

$$c'x = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 12 + \lambda_3 \times 24 + \lambda_4 \times 10$$
$$= 12\lambda_1 + 24\lambda_3 + 10\lambda_4$$

Portanto, o ótimo é fazendo $\lambda_3 = 1$, e $x^* = \binom{3}{7}$ (ótimo único).

Letra c) Nesse caso o conjunto de restrições é ilimitado, e as direções extremas e as representações de x são dadas por:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1;\ \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, v_1, v_2 \geq 0$$

Considerando $c = \binom{1}{3}$ segue que:

$$c'd_1 = 5 > 0\{ \text{ ou } c'd_2 = 1 > 0\} \text{ solução ilimitada}$$

Se $c = \binom{\chi}{3}$, para que valores de χ teremos solução ilimitada? Resposta: $\chi > -\frac{3}{2}$. O que acontece se $\chi = -\frac{3}{2}$? Resposta: Solução limitada, $z^* = 18$, $x^* = \binom{4}{8} + v\binom{2}{1}$, $v \geq 0$.

Resposta do Exercício 8

$$x_1 = 207 \to z = 3 \times 207 = 621$$
$$x_2 = \frac{207}{3} \to z = 9 \times \frac{207}{5} = 372,6$$
$$x_3 = \frac{207}{3} \to z = 6 \times \frac{207}{3} = 414$$
$$x_4 = \frac{207}{4} \to z = 7 \times \frac{207}{4} = 262,25$$
$$x_5 = \frac{207}{2} \to z = \frac{207}{2} = 331.2 x_6 = \frac{207}{5} \to z = 8 \times \frac{207}{5} = 331.2$$

Logo a solução ótima (única) é: $x_1^* = 207$, $x_i^* = 0$, $i = 2, \ldots, 6$, e $z^* = 621$ (máximo).

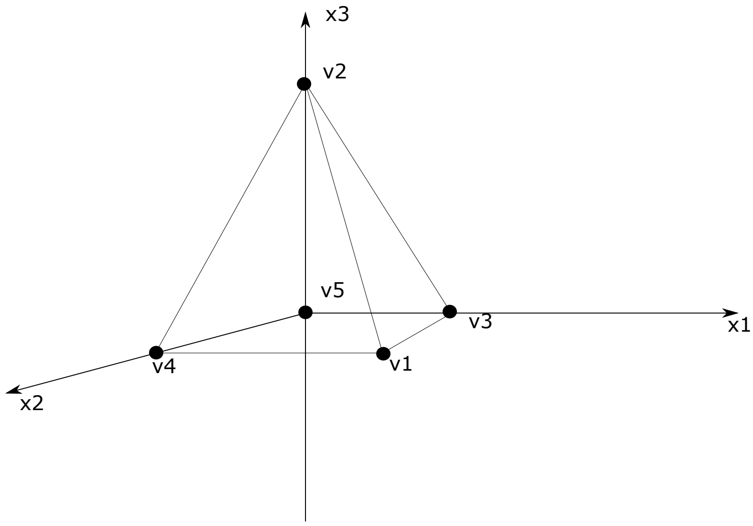
Resposta do Exercício 9

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1, \quad x_i \geq 0, \; i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Com as variáveis de folga a matriz A, e o vetor b são:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \text{número máximo soluções básicas: } \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

O gráfico da região factível é:



1) x_1 e x_2 na base, variáveis não básicas $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo temos o ponto extremo indicado no gráfico como v_1:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 = 1 \\ \hline \frac{3}{2}x_2 = \frac{1}{2} \to x_2 = \frac{1}{3}, x_1 = \frac{2}{3} \end{cases}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) x_1 e x_3 na base, variáveis não básicas $x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo temos o ponto extremo indicado no gráfico como v_2, que é uma solução básica factível degenerada ($x_1 = 0$).

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_3 = 1 \\ \hline \frac{1}{2}x_1 = 0 \to x_1 = 0, x_3 = 1. \end{cases}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) x_1 e x_4 na base, variáveis não básicas $x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$. Solução básica não factível.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = 2, x_4 = -1.$$

4) x_1 e x_5 na base, variáveis não básicas $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$. Solução básica factível correspondendo ao ponto extremo v_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = 0, x_5 = \frac{1}{2}, \;\; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) x_2 e x_3 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$. Solução básica factível degenerada, igual ao ponto extremo v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = 0, x_3 = 1.$$

6) x_2 e x_4 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$. Solução básica factível correspondendo ao ponto extremo v_4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}; x_4 = \frac{1}{2}; \;\; v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

7) x_2 e x_5 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$. Solução básica não factível.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = 1, x_5 = -1$$

8) x_3 e x_4 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_2 = 0, x_5 = 0$. Solução básica factível degenerada, igual ao ponto extremo v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_3 = 1; x_4 = 0$$

9) x_3 e x_5 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$. Solução básica factível degenerada, igual ao ponto extremo v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_3 = 1; x_5 = 0$$

10) x_4 e x_4 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Solução básica factível correspondendo ao ponto extremo $v_5 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_4 = 1; x_5 = 1$$

Temos 5 pontos extremos (soluções básicas factíveis), estando de acordo com o gráfico.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que $c'v_1 = 1$, $c'v_2 = 1$, $c'v_3 = 1$, $c'v_4 = 1/2$, $c'v_5 = 0$ e portanto temos $z^* = 1$ com infinitas soluções ótimas dadas por

$$x^* = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,\ \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,\ \ \lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3.$$

Resposta do Exercício 10 Considere:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

em K, isto é,

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ y_1^2 + y_2^2 \leq 1 \end{cases}$$

Seja

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$, vamos mostrar que $z \in K$, isto é, $z_1^2 + z_2^2 \leq 1$. Realmente,

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 \\ z_2 &= \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 \\ 0 \leq (x_i - y_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i &\leq 1 - 2x_i y_i \\ \rightarrow x_i y_i &\leq \frac{1}{2},\ \ i = 1, 2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} z_1^2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^2 = \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 y_1^2 + 2\lambda(1-\lambda) x_1 y_1 \\ z_2^2 = (\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)^2 = \lambda^2 x_2^2 + (1-\lambda)^2 y_2^2 + 2\lambda(1-\lambda) x_2 y_2 \\ z_1^2 + z_2^2 = \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2) + (1-\lambda)^2 (y_1^2 + y_2^2) + 2\lambda(1-\lambda)(x_1 y_1 + x_2 y_2) \leq \ldots \\ \underline{\ldots \lambda^2 1 + (1-\lambda)^2 1 + 2\lambda(1-\lambda)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})} \\ z_1^2 + z_2^2 \leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) = (\lambda + (1-\lambda))^2 = 1. \end{cases}$$

Resposta do Exercício 11

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & \text{-5} & 0 & \text{-8} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{19}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{19}{5} \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{19}{5} - x_3 \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{cases} \quad \text{Solução é dada pela reta: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

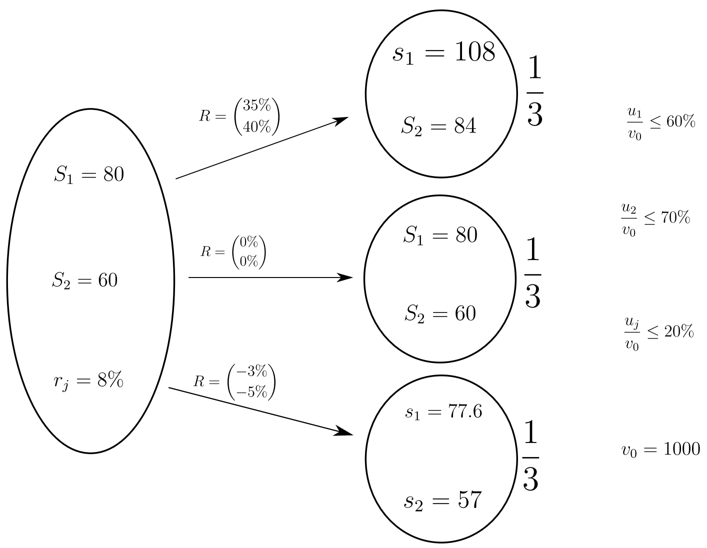
Com isso temos os seguintes pontos extremos (temos somente 2 bases):

$$\text{Base1: } (x_1,\, x_2) \text{ na base } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{19}{5} \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{matrix} \quad x_3 = 0$$

$$\text{Base2:} (x_2,\, x_3) \text{ na base } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 = \frac{8}{5} \\ x_3 = \frac{19}{5} \end{matrix} \quad x_1 = 0$$

Conjunto factível dado por:

$$x = \lambda \begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \frac{19}{5} \\ \frac{8}{5} \\ (1-\lambda)\frac{19}{5} \end{pmatrix}, 0 \le \lambda \le 1$$



Resposta do Exercício 12

$$\begin{aligned} t = 0: & \\ v_0 = u_f + u_1 + u_2 \rightarrow u_f &= v_0 - (u_1 + u_2) \\ 0 \le u_1 + u_2 = v_0 - u_f &\le 800 \\ t = 1 : V(1) = (1 + r_f)u_f + (1 + R_1)u_1 &+ (1 + R_2)u_2 \\ V(1) = (1 + r_f)v_0 + (R_1 - r_f)u_1 &+ (R_2 - r_f)u_2 \\ = 1080 + (R_1 - r_f)u_1 &+ (R_2 - r_f)u_2 \end{aligned}$$

R	V(1)
$\begin{pmatrix} 35\% \\ 40\% \end{pmatrix}$	$1080 + 0.27 * u_1 + 0.32u_2$
$\begin{pmatrix} 0\% \\ 0\% \end{pmatrix}$	$1080 - 0.08 * u_1 - 0.08u_2$
$\begin{pmatrix} -3\% \\ -5\% \end{pmatrix}$	$1080 - 0.11 * u_1 - 0.13u_2$
$E(u(1))$	$1080 + \frac{1}{3}(0.08 * u_1 + 0.11u_2)$

$$\max\ (8u_1 + 11u_2)/300$$
$$\text{sujeito a } \begin{cases} 0 \leq u_1 \leq 600 \\ 0 \leq u_2 \leq 700 \\ 0 \leq u_1 + u_2 \leq 800. \end{cases}$$

Resolvendo temos que a solução ótima é: $u_f^* = 200$, $u_1^* = 100$, $u_2^* = 700$, e o retorno esperado ótimo é: 10.833%

Resposta do Exercício 13

$$\min 5x_1 - 8x_2 - 3x_3$$
$$\text{sujeito a } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 1 \\ -3x_1 - 8x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ -2x_1 - 12x_2 + 3x_3 \leq 9 \end{cases}$$

Colocando na forma de tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a
-5	8	3	0	0	0	0
2	5	-1	1	0	0	1
-3	-8	2	0	1	0	4
-2	-12	3	0	0	1	9

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a
$-\frac{41}{5}$	0	$\frac{23}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	0	$-\frac{8}{5}$
$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	1	0	$\frac{28}{5}$
$\frac{14}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	1	$\frac{57}{5}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a
$-\frac{105}{10}$	0	0	-20	$-\frac{23}{2}$	0	-66
$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	3
$\frac{1}{2}$	0	1	4	$\frac{5}{2}$	0	14
$\frac{5}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	3

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta do Exercício 14

$$x(k+1) = \frac{1}{3}x(k) + 4u(k),\ x_0 = 9$$
$$x(3) = 0 \ \rightarrow \ \text{minimizando } |u(0)| + |u(1)| + |u(2)|$$

Com isso temos,

$$\begin{aligned} x(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 x_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 4u(2) + \left(\frac{1}{3}\right) 4u(1) + 4u(2) \\ = \frac{1}{27}9 + \frac{4}{9}u(0) + \frac{4}{3}u(1) + 4u(2) = 0 \\ \rightarrow 4\left(\frac{u(0)}{9} + \frac{1}{3}u(1) + u(2)\right) = -\frac{1}{3} \\ \rightarrow \frac{u(0)}{9} + \frac{u(1)}{3} + u(2) = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Assumindo que $u(k) = u^+(k) - u^-(k)$, $\forall\ k = 0,1,2$ onde, $u^+(k) \geq 0$, $u^-(k) \geq 0$.

Letra a)

$$\begin{aligned} \min u^+(0) + u^-(0) + u^+(1) + u^-(1) + u^+(2) + u^-(2) \\ \text{s.a.} \ \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^+(0) \\ u^-(0) \\ u^+(1) \\ u^-(1) \\ u^+(2) \\ u^-(2) \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}, \\ u^+(k) \geq 0, \ \ u^-(k) \geq 0, \ \ k = 0,1,2. \end{aligned}$$

Temos 6 soluções básicas dentre essas 3 são soluções básicas factíveis.

Letra b)

$$\begin{aligned} 1) - \frac{1}{9}u^-(0) = -\frac{1}{12} \rightarrow u^-(0) = \frac{3}{4}, z = \frac{3}{4} \\ 2) - \frac{1}{3}u^-(1) = -\frac{1}{12} \rightarrow u^-(1) = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{4} \\ 3) - u^-(2) = -\frac{1}{12} \rightarrow u^-(2) = \frac{1}{12}, z = \frac{1}{12} \ \text{ solução ótima} \end{aligned}$$

Logo, $u^*(0) = 0$, $u^*(1) = 0$, $u^*(2) = -\frac{1}{12}$, $z^* = \frac{1}{12}$.

Letra c)

$$x^*(1) = \frac{1}{3}9 = 3$$
$$x^*(2) = \frac{1}{3}3 = 1$$
$$x^*(3) = \frac{1}{3}1 - 4\frac{1}{12} = 0$$

Resposta do Exercício 15 Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	u_2	u_6	u_3	10
$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	1
u_4	u_5	0	1	u_1

Onde, x_1 é não básica e x_4 é não básica, com isso, x_2 e x_3 são básicas. $x_3 = 1$, $x_2 = u_1$. E ainda, $\rightarrow u_2 = 0,\ u_5 = 1,\ u_6 = 0$.

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	0	u_3	10
$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	1
u_4	1	0	1	$u_1 \rightarrow \frac{10}{3}$

$$10 = c_1x_1 + c_2x_2 = 3x_2 \rightarrow x_2 = \frac{10}{3}$$

Colocando x_4 na base tirar x_2.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
$1 - u_4u_3$	$-u_3$	0	0	$10 - \frac{10}{3}u_3$
$\frac{3}{5} - \frac{u_4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
u_4	1	0	1	$\frac{10}{3}$

Com isso,

$$-u_3 = -3 \rightarrow u_3 = 3$$
$$1 - u_4u_3 = 1 - u_43 = -5$$
$$\rightarrow u_4 = \frac{-6}{-3} = 2$$

O tableau original é:

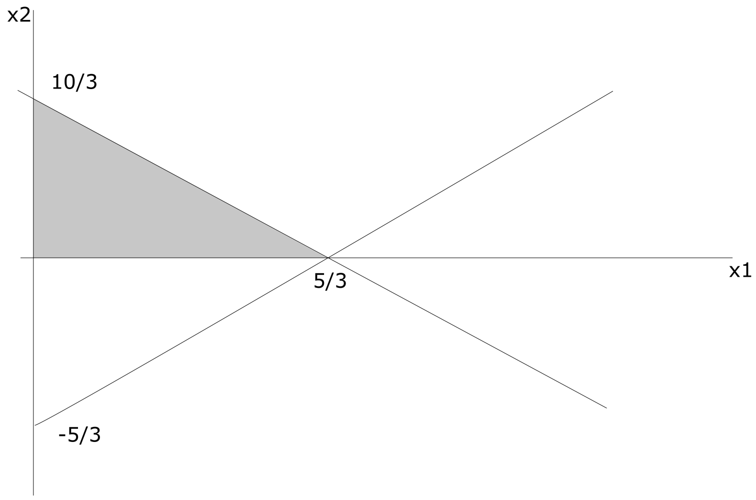
x_1	x_2	x_3	x_4	b
-5	-3	0	0	0
$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{3}$
2	1	0	1	$\frac{10}{3}$

Problema original:

$$\max 5x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 2x_1 + x_2 \leq \frac{10}{3}, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



——— BOA SORTE :D ———