MAE 326- Aplicações de Processos Estocásticos - Coleção de Exercícios 3

1. O número de clientes num sistema (aguardando na fila ou sendo atendido) em cada instante t ($X_t \in \{0, 1, \ldots\}$) evolue conforme uma cadeia de Markov com taxas de transição dadas por $q_{i,i+1} = 1\ h^{-1}$, $i \geq 0$, $q_{i,i-1} = 3\ h^{-1}$, $i \geq 1$. Suponha que no instante 0 a distribuição do sistema é tal que há k clientes no sistema com probabilidade $(\frac{1}{2})^{k+1}$. Esta distribuição é estacionária?

2. Clientes chegam a uma estação de serviço com 2 servidores de acordo com um processo de Poisson com a taxa λ. Caso os dois servidores estiverem ocupados, os clientes aguardam em uma fila com capacidade infinita. Os tempos de serviço do servidor i são exponenciais com parâmetros μ_i, $i = 1, 2$. Caso um cliente que chega encontre os dois servidores livres, é igualmente provável que ele escolha qualquer um dos dois. Descreva este modelo como uma cadeia de Markov a tempo contínuo. Mostre que esta cadeia é reversível. Quando existe, determine a medida estacionária e o número médio de clientes no sistema.

3. Certo aparelho pode estar em três estados: 0=*funcionando perfeitamente*, 1=*funcionando, mas de forma inadequada* e 2=*quebrado e sendo consertado*. Os tempos de permanência (em minutos) em cada estado têm distribuições exponenciais independentes com médias 300 minutos, 100 minutos e 50 minutos, respectivamente. Ao final do tempo de permanência num estado a escolha do estado seguinde se faz conforme a matriz de transição dada por $M(0,1) = M(0,2) = M(1,0) = M(1,2) = M(2,0) = M(2,2) = 1/2$ e $M(i,j) = 0$ caso contrário. Denote por X_t o estado do aparelho no instante $t \geq 0$. a) Determine as taxas dessa cadeia de Markov. b) Determine uma distribuição estacionária. Ela é única? c) Se no instante zero o aparelho está *funcionando perfeitamente*(estado 0), estime a probabilidade dele estar *funcionando, mas de forma inadequada*(estado 1) logo depois da 137.539 mudança de estado (ou seja, logo depois da 137.539 transição da cadeia imersa).

4. Numa pequena colonia de insetos há machos e femeas. Durante um curto intervalo de tempo h, cada macho pode cruzar com cada femea com probabilidade $\lambda h + o(h)$ e cada cruzamento gera "instantaneamente" um novo inseto, que pode ser macho ou fêmea com igual probabilidade. Denote por $N_m(t)$ e $N_f(t)$, respectivamente, o número de machos e fêmeas no instante t. Construa a cadeia de Markov em tempo contínuo correspondente.

5. Numa oficina há duas máquinas cuja manutenção é feita por apenas um funcionário. As duas máquinas são diferentes e falham após tempos exponenciais independentes com taxas distintas. Os tempos de reparo também são v.a. exponenciais independentes com parâmetros distintos. Represente a cadeia de Markov correspondente e identifique a distribuição estacionária. Ela é reversível?

6. Clientes potenciais chegam a um sistema de fila única com apenas um atendente conforme um processo de Poisson com parâmetro λ. Um cliente que chega e encontra n indíviduos no sistema, entra com probabilidade

p_n. Os atendimentos são por ordem de chegada e demoram tempos exponenciais independentes com taxa μ. Descreva esta cadeia de Markov.

7. Um processo de nascimento e morte com $\lambda_n = 0$ e $\mu_n = \mu$ é chamado de "processo de morte puro". Determine $P_{ij}(t)$.

8. Numa pequena barbearia há apenas um barbeiro e lugar para no máximo dois clientes. Clientes potenciais chegam conforme um processo de Poisson com taxa λ mas só entram na barbearia se houver lugar. Cada atendimento demora um tempo exponencial com parâmetro μ. a) Qual é o número médio de clientes na barbearia? b) Qual é a proporção de clientes que entram na barbearia? c) Se cada cliente paga X reais, quanto o barbeiro ganha por hora? d) Qual é a proporção do tempo que ele fica sem ter quem barbear? e) Se barbeiro quer ganhar mais, o que seria melhor: "investir em propaganda" (aumentar λ) ou "melhorar sua própria eficiência" (aumentar μ)? (Para simplificar, suponha que o custo do investimento para dobrar cada um desses dois parâmetros seja o mesmo. E se não for?)

9. Após cada reparo, certa máquina funciona por um tempo exponencial com parâmetro λ. Quando falha, o tipo de defeito pode ser de dois tipos: tipo A com probabilidade p ou tipo B com probabilidade $1 - p$; os tempos de reparo têm distribuição exponencial com parâmetros distintos. Assuma independência entre todas estas v.a e determine a distribuição estacionária.

10. Clientes potenciais chegam a um sistema de fila única e um único atendente conforme um processo de Poisson com parâmetro λ e tempos de atendimento com parâmetro μ. Se um cliente chega e encontra n clientes no sistema , ele entra com probabilidade $1/(n + 1)$. Determine a distribuição estacionária desta cadeia, se houver.