COMBINAÇÃO LINEAR

06/10/2020

DEF: Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um vetor $v \in V$ é <u>combinação linear</u> de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ se existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$.

Exemplos:

(1) $v = (1, -5) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de $(1,1) = v_1$ e $v_2 = (1,4)$

já que $\underset{v}{(1,-5)} = 3\underset{v_1}{(1,1)} + (-2)\underset{v_2}{(1,4)}$

(2) $\underset{v}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} \in M_2(\mathbb{R})$ é combinação linear de

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

já que $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

DEF: Subespaço Gerado por um subconjunto

$$S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$$

$[S] = \{$ todas as combinações lineares de vetores de $S\}$

$= \{ a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n \}$ tais que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Mostrar que $[S]$ é um subespaço de V.

(1) $0 \in [S]$, pois $\underset{\text{vetor}}{\underset{\sim}{0}} = \underset{\in \mathbb{R}}{0} u_1 + \underset{\in \mathbb{R}}{0} u_2 + \cdots + \underset{\in \mathbb{R}}{0} u_n$

(2) Sejam $u, v \in [S]$. Mostrar que $u + v \in S$.

$u \in [S] \Rightarrow$ existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n$.

$v \in [S] \Rightarrow$ existem $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tais que

$v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n$.

Então $u+v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + b_1 u_1 + \cdots + b_n v_n$

$$\overset{\text{Associativa, Comutativa, M 2}}{=} \underbrace{(a_1+b_1)}_{\in \mathbb{R}} v_1 + \underbrace{(a_2+b_2)}_{\in \mathbb{R}} v_2 + \cdots + \underbrace{(a_n+b_n)}_{\in \mathbb{R}} u_n .$$

Logo $u+v$ é combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$.

(3) $u \in [S]$ e $a \in \mathbb{R}$. Mostrar que $au \in [S]$.

$u \in [S] \Rightarrow \exists\, a_1, \ldots, a_n$ tais que

$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n u_n$

Logo $au = a(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n)$

$$\overset{\text{Ass., M 4, M 3}}{=} \underbrace{(a a_1)}_{\in \mathbb{R}} u_1 + \cdots + \underbrace{(a a_n)}_{\in \mathbb{R}} u_n$$

Portanto au é C.L. de $v_1, \ldots, u_n$ e então $av \in S$

DEF: $[S]$ = SUBESPAÇO GERADO POR S

$[S] = [v_1, \ldots, v_n]$.

OBSERVAÇÃO 1.

Se $S = \phi$, colocamos
$[\phi] = \{0\}$.

OBSERVAÇÃO 2

Se S é infinito, $[S]$ é definido por
$v \in [S] \iff$ existem $v_1, \ldots, v_k \in S$
e $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tais que
$v = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$

Propriedades

(1) $S \subset [S]$

(2) Se $S_1 \subset S_2$ então $[S_1] \subset [S_2]$.

(3) $[S] = [[S]]$

(4) $[S_1 \cup S_2] = [S_1] + [S_2]$

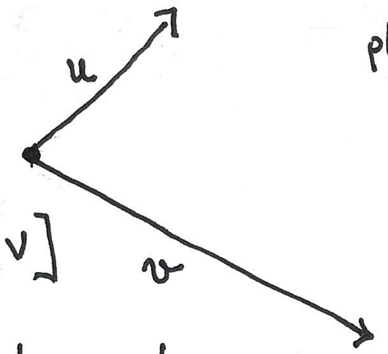
Exemplos

Em $\mathbb{R}^3$

$v \neq 0$

$[v] = \{ av \mid a \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R}^3$



plano pela origem

$S = [u, v]$

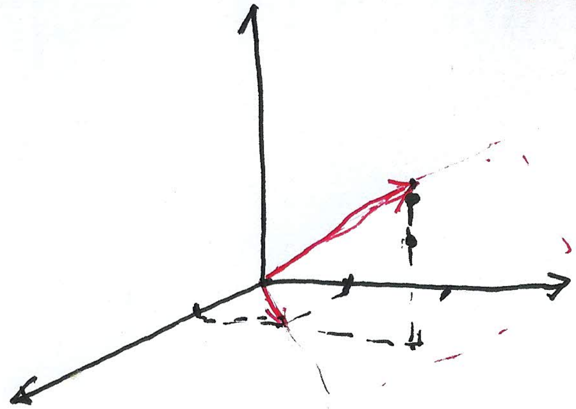
$\{ au + bv \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

$u = (1, 1, 0)$

$v = (1, 2, 2)$

$\{(a, a, 0) + (b, 2b, 2b)$

$= \{(\underbrace{a+b}_{x}, \underbrace{a+2b}_{y}, \underbrace{2b}_{z}) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$



$a + z = y$

$x = a + b$

$a = x - b$

$x - y + \frac{1}{2} z = 0 \qquad x - b + z = y$

$x - \frac{1}{2} z + z = y$